# Szkice do wykładu z ***Analizy Matematycznej*** dla I roku matematyki finansowej i matematyki z metodami numerycznymi[1]

dr Jarosław Kotowicz

23 czerwca 2003 roku

# Spis treści

# Program wykładu z Analizy Matematycznej

Plan wykładu kursowego **Analiza matematyczna**
w roku akademickim 2002/2003 - studia dzienne 45 godzin wykładów - semestr I (zimowy)
prowadzący dr J. Kotowicz

**Zagadnienia wykładu:**

1. Spójniki logiczne i kwantyfikatory. Działania na zbiorach. Relacje i ich typy. **1 godz.**
2. Aksjomatyka ciała liczbowego i ciała uporządkowanego. Własności działań w ciele. Zbiory uporządkowane i kresy – dolny i górny. **1 godz.**
3. Liczby rzeczywiste
   (a) Zasada ciągłości Dedekinda. Zasada Archimedesa. Gęstość liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych. **1 godz.**
   (b) Twierdzenie o istnieniu pierwiastka. Wartość bezwzględna i jej własności. Część całkowita liczby. Znak liczby (sign). Średnie: arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna i ich związek. Indukcja matematyczna zupełna. **1 godz.**
4. Funkcje **1 godz.**
5. Ciągi liczbowe
   (a) Granica ciągu i ciągi zbieżne. Jednoznaczność granicy ciągu.. Działania algebraiczne na granicach ciągach zbieżnych. **1 godz.**
   (b) Podciągi, twierdzenie o trzech ciągach. **1 godz.**
   (c) Ciągi monotoniczne. Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych. Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Ciągi Cauchy'ego. Twierdzenie Cauchy'ego. **2 godz.**
   (d) Granice niewłaściwe ciągów. **1 godz.**
   (e) Granica górna i dolna ciągu. Charakteryzacja zbieżności przy ich pomocy. **1 godz.**
6. Szeregi liczbowe
   (a) Pojęcie szeregu liczbowego, zbieżność szeregu i jego suma. **1 godz.**
   Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu, szeregi o wyrazach nieujemnych, kryteria zbieżności szeregów: zagęszczania, porównawcze, d'Alamberta i Cauchy'ego. **2 godz.**
   (b) Szeregi bezwzględnie zbieżne i warunkowo zbieżne. Kryteria zbieżności szeregów naprzemiennych: Leibniza, Dirichleta. **2 godz.**
   (c) Działania na szeregach zbieżnych i bezwzględnie zbieżnych. Iloczyn Cauchy'ego. **2 godz.**
7. Elementy topologii prostej rzeczywistej (zbiory otwarte, domknięte, zwarte, domknięcie zbioru). Prosta rzeczywista jako przestrzeń metryczna. **2 godz.**
8. Granica funkcji w punkcie - definicja Heinego i Cauchy'ego. Granice jednostronne i w nieskończoności. Granice nieskończone. **3 godz.**

9. Ciągłość funkcji zmiennej rzeczywistej. Operacje algebraiczne na funkcjach ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji. Funkcje elementarne, a ciągłość. **3 godz.**

10. Ciągłość, jednostajna ciągłość na zbiorach zwartych. Twierdzenie Weierstrassa. Twierdzenie Darboux. Ciągłość funkcji odwrotnej. **3 godz.**

11. Różniczkowalność funkcji.

    (a) Różniczkowalność funkcji (dwa podejścia). Pochodna funkcji w punkcie. Różniczkowalność, a ciągłość. Definicja pochodnych wyższych rzędów. **2 godz.**

    (b) Działania algebraiczne na funkcjach różniczkowalnych. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej. **1 godz.**

    (c) Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego. **2 godz.**

Plan wykładu kursowego **Analiza matematyczna**
w roku akademickim 2002/2003 - studia dzienne 45 godzin wykładów - semestr II (letni)
prowadzący dr J. Kotowicz

**Zagadnienia wykładu.**

1. Różniczkowalność funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

    (a) Jednostajna ciągłość, monotoniczność, a pochodna. **1 godz.**

    (b) Analiza zachowania lokalnego funkcji różniczkowalnych w oparciu o jej pierwszą pochodną. Ekstrema lokalne funkcji, punkty krytyczne - stacjonarne. Warunek konieczny i dostateczne ekstremum lokalnego funkcji. **1 godz.**

    (c) Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora i Maclaurina. Zastosowania wzoru Taylora. **2 godz.**

    (d) Wklęsłość i wypukłość funkcji, a własności drugiej pochodnej. **1 godz.**

    (e) Symbole nieoznaczone i reguła de l'Hospitala. **1 godz.**

2. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. Całkowanie przez części i podstawianie. **1 godz.**

3. Całka nieoznaczona pewnych typów funkcji (funkcje wymierne, trygonometryczne, niewymierne – zawierające pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego). **2 godz.**

4. Całki Riemanna i Riemanna - Stieltjesa.

    (a) Podział odcinka. Sumy Darboux. Całki Darboux. Całka Riemanna. Całka Riemanna - Stieltjesa. **2 godz.**

    (b) Twierdzenia o całkowalności pewnych klas funkcji dla całki Riemanna - Stieltjesa. **3 godz.**

    (c) Własności całki Riemanna - Stieltjesa. **3 godz.**

    (d) Twierdzenie Lebesgue'a. **1 godz.**

    (e) Całka Riemanna, a różniczkowalność – zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego. **1 godz.**

    (f) Całka niewłaściwa Riemanna. **5 godz.**

        i. Całka niewłaściwa na odcinku bez końca.
        ii. Całka niewłaściwa na półprostej.
        iii. Całki niewłaściwe na prostej.
        iv. Całki niewłaściwe zbieżne w sensie wartości głównej Cauchy'ego.
        v. Ważne całki niewłaściwe (całki Eulera I - go i II - go rodzaju, całka Fresnela).

    (g) Określenie logarytmu naturalnego wg Kleina i funkcji wykładniczej (exp). Ich związek z funkcją wykładniczą określoną za pomocą szeregu potęgowego i logarytmem naturalnym. **1 godz.**

    (h) Długość łuku krzywej – całka Riemanna z funkcji o wartościach wektorowych. **1 godz.**

5. Ciągi i szeregi funkcyjne.

(a) Zbieżność punktowa, jednostajna, lokalnie jednostajna i niemal jednostajna ciągów funkcyjnych i związek między nimi. **2 godz.**

(b) Zbieżność lokalnie jednostajna, a ciągłość funkcji granicznej. **3 godz.**

(c) Warunek jednostajny Cauchy'ego, a zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego. Przestrzeń $C(X)$. **1 godz.**

(d) Zbieżność szeregów funkcyjnych. Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej. Kryteria zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych (kryterium Weierstrassa, Dirichleta, Abela). **2 godz.**

(e) Całkowanie i różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych. **3 godz.**

6. Istnienie funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej. **1 godz.**

7. Szeregi potęgowe i ich rodzaj zbieżność. **2 godz.**

   (a) Pojęcie szeregu potęgowego i jego promienia zbieżności.

   (b) Twierdzenia Abela.

   (c) Różniczkowanie szeregu potęgowego.

   (d) Twierdzenia Abela o iloczynie Cauchy'ego szeregów liczbowych (dowód).

   (e) Twierdzenie Taylora.

8. Funkcje analityczne. **2 godz.**

9. Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa. **2 godz.**

10. Podstawy szeregów Fouriera **2 godz.**

**Literatura podstawowa:**


1. A. Birkholc, *Analiza matematyczna dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1980
2. G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa
3. K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1979
4. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1976 Warszawa 1978
5. K. Maurin, *Analiza cz. I. Elementy*, PWN, Warszawa 1991
6. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982


**Literatura uzupełniająca:**


1. B.P. Demidowicz, *Zbiór zadań i ćwiczeń z analizy matematycznej*,
2. I.A. Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej*, WNT, Warszawa 1974
3. G.I. Zaporożec, *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa 1974

# Wykład 1

# 2002.10.07 / 3h

## 1.1 Zbiory. Relacje.

**Definicja 1.1** *Niech A, B będą zbiorami. Wówczas*

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \vee x \in B\} \tag{1.1}$$
$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B\} \tag{1.2}$$
$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \tag{1.3}$$
$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} \tag{1.4}$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall_x x \in A \Rightarrow x \in B. \tag{1.5}$$

*Niech ponadto X będzie uniwersum - przestrzenią. Wówczas*

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus A \tag{1.6}$$

**Definicja 1.2** *Zbiorem potęgowym zbioru $X$ nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów i oznaczamy go $2^X$.*

**Definicja 1.3** *Relacją $\mathcal{R}$ określoną w iloczynie kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy dowolny podzbiór tego iloczynu tzn.*

$$\mathcal{R} \textit{ jest relacją na } A \times B \Leftrightarrow \mathcal{R} \subset A \times B. \tag{1.7}$$

Będziemy oznaczać $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$.

**Uwaga 1.1** *Jeżeli $\mathcal{R} \subset A \times B$, to możemy rozpatrywać relację $\mathcal{R}$ na $D \times D$, gdzie $D \stackrel{\text{def}}{=} A \cup B$.*
*Ograniczymy się więc do relacji określonych na iloczynie kartezjańskim tego samego zbioru.*

**Definicja 1.4** *Relację $\mathcal{R} \subset A \times A$ nazywamy*
*zwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in A}\ x\mathcal{R}x \tag{1.8}$$

*przeciwzwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in A} \neg x\mathcal{R}x \tag{1.9}$$

*symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y \in A} x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \tag{1.10}$$

*asymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y \in A} x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg y\mathcal{R}x \tag{1.11}$$

*antysymetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y \in A} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y \tag{1.12}$$

*przechodnią wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y,z\in A} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z \tag{1.13}$$

*spójną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y} \text{ zachodzi dokładnie jedna z możliwości } x\mathcal{R}y \text{ albo } y\mathcal{R}x \text{ albo } x = y \tag{1.14}$$

**Przykład 1.1** *Relacja równoległości dla prostych na płaszczyźnie jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

*Relacja prostopadłości dla prostych na płaszczyźnie jest przeciwzwrotna, symetryczna.*

*W zbiorze liczb rzczywistych relacja mniejszości jest przeciwzwrotna, asymetryczna, przechodnia i spójna.*

*W zbiorze liczb rzczywistych relacja niewiększości ($\leqslant$) jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.*

**Definicja 1.5** *Relację $\mathcal{R}$ nazywamy relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

**Definicja 1.6** *Niech $X \neq \emptyset$ oraz niech $<$ będzie relacją określoną na $X \times X$. Mówimy, że para (struktura) $(X, <)$ jest zbiorem uporządkowanym wtedy i tylko wtedy, gdy $<$ jest spójna i przechodnia.*
*Relację $<$ nazywamy porządkiem na zbiorze $X$.*

## 1.2 Ciało liczbowe i ciało uporządkowane

**Definicja 1.7** *Niech $F \neq \emptyset$. Strukturę $(F, +, 0, \cdot, 1)$ nazywamy ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki*

$$0 \in F \wedge 1 \in F \wedge 0 \neq 1 \tag{1.15}$$
$$+ : F \times F \to F \wedge \cdot : F \times F \to F \tag{1.16}$$
$$\forall_{x,y\in F} x + y = y + x \tag{1.17}$$
$$\forall_{x,y,z\in F} (x + y) + z = x + (y + z) \tag{1.18}$$
$$\forall_{x\in F} x + 0 = x \tag{1.19}$$
$$\forall_{x\in F} \exists_{-x\in F} x + (-x) = 0 \tag{1.20}$$
$$\forall_{x,y\in F} x \cdot y = y \cdot x \tag{1.21}$$
$$\forall_{x,y,z\in F} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{1.22}$$
$$\forall_{x\in F} x \cdot 1 = x \tag{1.23}$$
$$\forall_{x\in F\setminus\{0\}} \exists_{x^{-1}\in F} x \cdot x^{-1} = 1 \tag{1.24}$$
$$\forall_{x,y,z\in F} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{1.25}$$

**Definicja 1.8** *Ciało $(F, +, 0, \cdot, 1)$ nazywamy ciałem uporządkowanym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje porządek $<$ w zbiorze $F$ spełniający warunki*

$$\forall_{x,y,z\in F} y < z \Rightarrow x + y < x + z \tag{1.26}$$
$$\forall_{x,y\in F} x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0 \tag{1.27}$$

*Oznaczamy je przez $(F, +, 0, \cdot, 1, <)$*

**Twierdzenie 1.1** *Niech $(F, +, 0, \cdot, 1)$ będzie ciałem. Wtedy dla dowolnych $x, y, z \in F$ zachodzi*

$$x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z \tag{1.28}$$
$$x + y = x \quad \Rightarrow \quad y = 0 \tag{1.29}$$
$$x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x \tag{1.30}$$
$$-(-x) = x \tag{1.31}$$
$$x \neq 0 \wedge xy = xz \quad \Rightarrow \quad y = z \tag{1.32}$$
$$x \neq 0 \wedge xy = x \quad \Rightarrow \quad y = 1 \tag{1.33}$$
$$x \neq 0 \wedge xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x^{-1} \tag{1.34}$$

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x^{-1})^{-1} = x \tag{1.35}$$

$$0x = 0 \tag{1.36}$$

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \neq 0 \tag{1.37}$$

$$(-x)y = -(xy) = x(-y) \tag{1.38}$$

$$(-x)(-y) = xy \tag{1.39}$$

**Twierdzenie 1.2** *Niech $(F, +, 0, \cdot, 1, <)$ będzie ciałem uporządkowanym. Wtedy dla dowolnych $x, y, z \in F$ zachodzi*

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x < 0 \tag{1.40}$$

$$x > 0 \wedge y < z \quad \Rightarrow \quad xy < xz \tag{1.41}$$

$$x < 0 \wedge y < z \quad \Rightarrow \quad xy > xz \tag{1.42}$$

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 0 \tag{1.43}$$

$$1 > 0 \tag{1.44}$$

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < y^{-1} < x^{-1} \tag{1.45}$$

**Definicja 1.9** *Niech $(F, +, 0, \cdot, 1)$ będzie ciałem. Niech ponadto $x, y \in F$. Określamy działania*

$$- : F \times F \to F \;\; x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y); \tag{1.46}$$

$$/ : F \times F \to F \;\; x/y \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y^{-1}. \tag{1.47}$$

## 1.3 Kresy.

**Uwaga 1.2** *Piszemy dla $x, y \in X$, gdzie $(X, <)$ jest zbiorem uporządkowanym*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \text{ albo } x = y \tag{1.48}$$

**Definicja 1.10** *Niech $X$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$. Niech ponadto $\emptyset \neq A \subset X$.*
*Mówimy, że zbiór $A$ jest ograniczony z góry (z dołu) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki element $\beta$ z $X$, że dla dowolnego elementu $x$ z $A$ zachodzi $x \leqslant \beta$ ($\beta \leqslant x$).*

**Przykład 1.2** *Dla przedziału $]0, 1[$ ograniczeniami górnymi są wszystkie liczbe nie mniejsze niż 1, a ograniczeniami dolnymi są liczby nie większe niż 0.*

**Definicja 1.11** *Niech $X$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$. Niech ponadto $\emptyset \neq A \subset X$.*
*Mówimy, że element $\alpha$ jest ograniczeniem górnym (dolnym) zbioru $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $x \leqslant \alpha$ ($\alpha \leqslant x$).*

**Definicja 1.12** *Niech $X$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $<$. Niech ponadto $\emptyset \neq A \subset X$ będzie podzbiorem ograniczonym z góry (z dołu).*
*Element $\alpha$ jest kresem górnym (dolnym) zbioru $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
*(i) $\alpha$ jest ograniczeniem górnym (dolnym) zbioru $A$*
*(ii) dla dowolnego elementu $y$ z $X$ takiego, że $y < \alpha$ ($\alpha < y$) wynika, że $y$ nie jest ograniczeniem górnym (dolnym) zbioru $A$*

Zauważmy, że w zbiorze liczb rzeczywistych, o których jest mowa w następnej części wykładu kresy definiujemy następująco:

**Definicja 1.13** *Niech zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Liczba $\alpha$ jest kresem dolnym zbioru $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in A} \alpha \quad \leqslant \quad x \tag{1.49}$$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} x \quad < \quad \alpha + \varepsilon \tag{1.50}$$

**Definicja 1.14** *Niech zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Liczba $\alpha$ jest kresem górnym zbioru $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x\in A} x \leqslant \alpha \tag{1.51}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{x\in A} x > \alpha - \varepsilon \tag{1.52}$$

**Przykład 1.3** *Dla przedziału $]0,1[$ kresem górnym jest 1, a dolnym 0.*

**Definicja 1.15** *Mówimy, że zbiór uporządkowany $X$ posiada własność kresów dolnych wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niepustego i ograniczonego z dołu zbioru $S \subset X$ w $X$ istnieje kres dolny zbioru $S$.*

**Uwaga 1.3** ***Z własności kresów dlanych można udowodnić następujące twierdzenie:***
*Niech $X$ będzie zbiorem uporządkowanym posiadającym własność istnienia kresów dolnych. Niech $S \subset X$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu. Oznaczmy przez $L$ zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru $B$. Wtedy*

$$\alpha = \sup L, \tag{1.53}$$

*istnieje i $\alpha = \inf B$. W szczególności $\inf B$ istnieje w $X$.*

## 1.4 Liczby rzeczywiste

**Definicja 1.16** *Niech $p, q \in \mathbb{Z}$. Liczbą wymierną nazywamy dowolna liczbę postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $q \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathbb{Q}$.*

**Twierdzenie 1.3** ***(Zasada ciągłość Dedekinda.) (Dowód dla osób zainteresowanych - patrz W. Rudin)***
*Istnieje ciało uporządkowane $\mathbb{R}$ posiadające własność istnienia kresów dolnych. Ciało to zawiera $\mathbb{Q}$, jako podciało.*

**Stwierdzenie 1.1** *Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepuste. Wówczas*
*(i) jeżeli $B$ są ograniczone z góry i $A \subset B$, to $\sup A \leqslant \sup B$*
*(ii) jeżeli $B$ są ograniczone z dołu i $A \subset B$, to $\inf A \geqslant \inf B$*
*(iii) Jeżeli $A$ jest ograniczony z góry i $B$ jest ograniczony z dołu oraz dla dowolnych $x \in A$ i $y \in B$ zachodzi $x \leqslant y$, to* $\sup A \leqslant \inf B$

**Twierdzenie 1.4** *(i) **(Zasada Archimedesa)** Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x > 0$, to istnieje taka liczba naturalna $n$, że $nx > y$.*
*(ii)(**Gęstość** $\mathbb{Q}$ **w** $\mathbb{R}$) Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to istnieje $p \in \mathbb{Q}$ takie, że $x < p < y$.*

## 1.5 Zadania

**Zadanie 1.1** *Udowodnić twierdzenie 1.1.*[1]

**Zadanie 1.2** *Udowodnić twierdzenie 1.2.*[2]

**Zadanie 1.3** *Udowodnić stwierdzenie 1.1(iii).*

**Zadanie 1.4** *Co się będzie działo, gdy pozbędziemy się warunku niepustości zbioru w kresach ? Ile wtedy wynosi kres górny i dolny zbioru pustego ?*

**Zadanie 1.5** *Udowodnić, że dla zbioru niepustego i ograniczonego z dołu i góry kres dolny jest niewiększy niż kres górny.*

**Zadanie 1.6** *Udowodnic, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.*

**Zadanie 1.7** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$. Oznaczmy $A \oplus B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$ $A \odot B = \{a \cdot b : a \in A \wedge b \in B\}$ $t \circ A = \{ta : a \in A\}$. Udowodnić, że jeżeli zbiory $A$ i $B$ są niepuste i ograniczone, to zbiory $A \oplus B, A \odot B$ $t \circ A$ są też ograniczone oraz*

[1] Można skorzystać z książki **W. Rudina**
[2] Można skorzystać z książki **W. Rudina**

- $\sup(A \oplus B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \oplus B) = \inf A + \inf B$
- $\sup(A \odot B) = \sup A \cdot \sup B, A \subseteq \mathbb{R}_+, B \subseteq \mathbb{R}_+$
- $\inf(A \odot B) = \inf A \cdot \inf B, A \subseteq \mathbb{R}_+, B \subseteq \mathbb{R}_+$
- *Jeżeli* $t > 0,$ *to* $\sup(t \circ A) = t \cdot \sup A$
- *Jeżeli* $t > 0,$ *to* $\inf(t \circ A) = t \cdot \inf A.$

# Wykład 2

# 2002.10.14 / 3h

## 2.1 Liczby rzeczywiste c.d.

**Twierdzenie 2.1** *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje jedna i tylko jedna dodatnia liczba rzeczywista $y$ taka, że $y^n = x$.*

**Definicja 2.1** *Niech $x \in \mathbb{R}$. Wartością bezwzględną liczby $x$ nazywamy liczbę rzeczywistą zdefiniowaną następująco*

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \textit{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \textit{dla } x < 0 \end{cases}. \tag{2.1}$$

**Lemat 2.1** *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\begin{aligned}
|x| &\geqslant 0 && (2.2)\\
|x| &= |-x| && (2.3)\\
-|x| \leqslant x &\leqslant |x| && (2.4)\\
|xy| &= |x||y| && (2.5)\\
|x| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 && (2.6)\\
y \neq 0 &\Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} && (2.7)\\
|x| \leqslant y &\Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y && (2.8)\\
|x+y| &\leqslant |x| + |y| && (2.9)\\
|x| - |y| \leqslant |x-y| &\leqslant |x| + |y| && (2.10)\\
||x| - |y|| &\leqslant |x-y| && (2.11)\\
||x| - |y|| &\leqslant |x+y| && (2.12)
\end{aligned}$$

**Definicja 2.2** *Częścią całkowitą liczby rzeczywistej $x$ nazywamy liczbę całkowitą oznaczaną $[x]$, która spełnia warunek*

$$[x] \leqslant x < [x] + 1. \tag{2.13}$$

**Definicja 2.3** *Znakiem liczby rzeczywistej $x$ nazywamy liczbę rzeczywistą określoną wzorem*

$$\operatorname{sign}(x) \equiv \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{dla } x > 0 \\ 0 & \textit{dla } x = 0 \\ -1 & \textit{dla } x < 0 \end{cases}. \tag{2.14}$$

**Twierdzenie 2.2** *Zasada indukcji matematycznej zupełnej.*
*Niech $\mathfrak{P}$ będzie pewna własnością. Jeżeli dla własności $\mathfrak{P}$ zachodzą następujące warunki*
*(1)* $\mathfrak{P}[1]$
*(2)* $\forall_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}[n] \Rightarrow \mathfrak{P}[n+1]$,
*to wówczas* $\forall_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}[n]$.

**Definicja 2.4** *Niech* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$*. Średnią arytmetyczną liczb* $a_1, \ldots, a_n$ *nazywamy liczbę równą*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \tag{2.15}$$

**Definicja 2.5** *Niech* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*. Średnią geometryczną liczb* $a_1, \ldots, a_n$ *nazywamy liczbę równą*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \tag{2.16}$$

**Definicja 2.6** *Jeżeli* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, to średnią harmoniczną liczb* $a_1, \ldots, a_n$ *nazywamy liczbę wyrażoną wzorem*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots \frac{1}{a_n}} \tag{2.17}$$

**Twierdzenie 2.3** *Niech* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+$*. Wtedy*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \tag{2.18}$$

## 2.2 Funkcje

Niech $X$ i $Y$ będą niepustymi zbiorami.

**Definicja 2.7** *Relację* $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ *nazywamy funkcją (odwzorowaniem) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} x \mathcal{R} y \tag{2.19}$$

$$\forall_{x \in X} \forall_{y, y_2 \in Y} x \mathcal{R} y_1 \wedge x \mathcal{R} y_2 \Rightarrow y_1 = y_2. \tag{2.20}$$

*Funkcję oznaczamy* $f : X \to Y$*.* $X$ *nazywamy zbiorem argumentów (dziedziną), zaś* $Y$ *przeciwdziedziną.*

**Uwaga 2.1** *Należy pamiętać, że funkcja to uporządkowana trójka (f,X,Y).*

**Uwaga 2.2** *Zbiór wszystkich funkcji ze zbioru* $X$ *w zbiór* $Y$ *oznaczamy przez* $Y^X$

**Definicja 2.8** *Niech* $f : X \to Y$*. Załóżmy, że* $A \subseteq X$*. Obrazem zbioru* $A$ *przy odwzorowaniu f nazywamy podzbiór* $Y$ *określony równością*

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in A\} \equiv \{y \in Y : \exists_{x \in A} y = f(x)\} \tag{2.21}$$

*Załóżmy, że* $B \subseteq Y$*. Przeciwobrazem zbioru* $B$ *przy odwzorowaniu f nazywamy podzbiór* $X$ *określony równością*

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \in B\} \tag{2.22}$$

**Uwaga 2.3** *Obraz całego zbioru* $X$ *nazywamy zbiorem wartości funckji f. Zauważmy, że zawsze jest* $f(X) \subseteq Y$*, lecz nie musi być* $f(X) = Y$*.*

**Przykład 2.1** *Dla funkcji* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mamy* $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$*.*

**Definicja 2.9** *Mówimy, że odwzorowanie* $f : X \to Y$ *jest stałe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{y_0 \in Y} f(X) = \{y_0\} \tag{2.23}$$

**Twierdzenie 2.4** *Niech* $f : X \to Y$*. Wówczas dla dowolnych* $\{A_1, A_2, A_\imath : \imath \in \mathfrak{I}\} \subseteq 2^X$ *oraz* $\{B_1, B_2, B_\imath : \imath \in \mathfrak{I}\} \subseteq 2^Y$ *zachodzi*

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2) \tag{2.24}$$

$$f(\bigcup_{\imath \in \mathfrak{I}} A_\imath) = \bigcup_{\imath \in \mathfrak{I}} f(A_\imath) \tag{2.25}$$

$$f(\bigcap_{\imath \in \mathfrak{I}} A_\imath) \subseteq \bigcap_{\imath \in \mathfrak{I}} f(A_\imath) \tag{2.26}$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \tag{2.27}$$

$$f^{-1}(\bigcup_{\imath \in \mathfrak{I}} B_\imath) = \bigcup_{\imath \in \mathfrak{I}} f^{-1}(B_\imath) \tag{2.28}$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\imath \in \mathfrak{I}} B_\imath) = \bigcap_{\imath \in \mathfrak{I}} f^{-1}(B_\imath) \tag{2.29}$$

**Definicja 2.10** *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy injekcją (odwzorowaniem różnowartościowym lub "1-1") wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2 \in X} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{2.30}$$

**Uwaga 2.4** *Warunek (2.30) definicji 2.10 może być zapisany w postaci*

$$\forall_{x_1,x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{2.31}$$

**Definicja 2.11** *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy surjekcją (odwzorowaniem "na") wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f(x) \tag{2.32}$$

**Definicja 2.12** *Niech $f : X \to Y$. Odwzorowanie f nazywamy bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjekcją i iniekcją.*

**Definicja 2.13** *Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$. Złożeniem odwzorowań f i g nazywamy odwzorowanie $h : X \to Z$ takie, że*

$$\forall_{x \in X} h(x) = g(f(x)). \tag{2.33}$$

*Piszemy wtedy $h = g \circ f$.*

**Definicja 2.14** *Niech X będzie niepustym zbiorem. Odwzorowaniem identycznościowym na X ( oznaczanym $\mathrm{Id}_X$ nazywamy takie odwzorowanie z X w X, że*

$$\forall_{x \in X}\ \mathrm{Id}_X\ (x) = x. \tag{2.34}$$

**Definicja 2.15** *Niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją. Odwzorowaniem odwrotnym do f nazywamy takie odwzorowanie $g : Y \to X$ takie, że*

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \wedge g \circ f = \mathrm{Id}_X\ . \tag{2.35}$$

*Oznaczamy je $g = f^{-1}$.*

**Uwaga 2.5** *$f^{-1}(A)$ będziemy odczytywać jako przeciwobraz zbioru A funkcji f i jako obraz zbioru A funkcji $f^{-1}$.*

Niech $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie funkcją. Niech $B \subseteq A$.

**Definicja 2.16** *Mówimy, że f jest rosnąca na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2 \in B} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \tag{2.36}$$

*Mówimy, że f jest niemalejąca na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2 \in B} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2). \tag{2.37}$$

*Mówimy, że f jest malejąca na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2 \in B} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{2.38}$$

*Mówimy, że f jest nierosnąca na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2 \in B} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2). \tag{2.39}$$

*Mówimy, że f jest monotoniczna na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierosnąca lub niemalejąca na zbiorze B. Mówimy, że f jest ściśle monotoniczna na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy jest rosnąca lub malejąca na zbiorze B.*

**Uwaga 2.6** *Jeżeli będziemy pomijać zbiór na którym funkcja jest monotoniczna, to oznacza to, iż jest monotoniczna na całej swej dziedzinie.*

**Definicja 2.17** *Mówimy, że f jest ograniczona z góry na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in B} f(x) \leqslant M. \tag{2.40}$$

*Mówimy, że f jest ograniczona z dołu na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{x \in B} m \leqslant f(x). \tag{2.41}$$

*Mówimy, że f jest ograniczona na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ograniczona z dołu na zbiorze B i f jest ograniczona z góry na zbiorze B.*

**Uwaga 2.7** *Podobnie, jak dla monotoniczności jeżeli bedziemy pomijać zbiór na którym funkcja jest ograniczona, to oznacza to, iż jest ograniczona na całej swej dziedzinie.*

## 2.3 Ciągi liczbowe – granica ciągu

Zajmiemy się teraz szczegónym przypadkiem funkcji, a mianowicie ciągiem liczbowym.

**Definicja 2.18** *Funkcję nazywamy ciągiem liczbowym (rzeczywistym) wtedy i tylko wtedy, gdy jej dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, a przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych.*

**Uwaga 2.8** *Ciągi oznaczamy* $(a_n) \equiv (a_n)_{n=1}^{\infty}$*. Wartość ciągu dla liczby naturalnej* $n$ *nazywamy* $n$ *- tym wyrazen ciągu i oznaczamy go* $a_n$*.*

**Definicja 2.19** *Mówimy, że ciąg* $(a_n)$ *ma granicę równą* $g$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{m\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant m}\,|a_n - g| < \varepsilon \tag{2.42}$$

*Zapisujemy wtedy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$*.*

**Twierdzenie 2.5** *Jeżeli ciąg posiada granicę, to tylko jedną.*

**Definicja 2.20** *Mówimy, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista* $g$ *będąca granicą ciągu.*

**Twierdzenie 2.6** *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

**Twierdzenie 2.7** ***(Działania na granicach ciągów.)***
*Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *oraz* $c$ *jest dowolna liczbą rzeczywistą, to*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \tag{2.43}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot a \tag{2.44}$$

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a \tag{2.45}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \tag{2.46}$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c \tag{2.47}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = a + c \tag{2.48}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b \tag{2.49}$$

$$b\neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \tag{2.50}$$

$$b\neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \tag{2.51}$$

## 2.4 Zadania

**Zadanie 2.1** *Udowodnić warunki (2.2) – (2.9) lematu 2.1.*

**Zadanie 2.2** *Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej* $x$ *zachodzi*

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & dla\ x\neq 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}. \tag{2.52}$$

**Zadanie 2.3** *Udowodnić twierdzenie 2.3.*

**Zadanie 2.4** *Niech* $X, Y \neq \emptyset$*,* $f\colon X\to Y$*. Udowodnić, że funkcja jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_1,x_2\in X} f(x_1) = f(x_2).$$

**Zadanie 2.5** *Udowodnić warunki (2.24), (2.25), (2.27), (2.28) twierdzenia 2.3.*

**Zadanie 2.6** *Udowodnić, że funkcja jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy jej przeciwdziedzina jest równa zbiorowi wartości.*

**Zadanie 2.7** *Udowodnić, że funkcja* $f\colon A \to \mathbb{R}$, *gdzie* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest ograniczona na zbiorze* $B \subseteq A$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{M\in\mathbb{R}_+}\forall_{x\in B}|f(x)| \leqslant M. \tag{2.53}$$

**Zadanie 2.8** *Udowodnić warunek (2.44) twierdzenia 2.7.*

**Zadanie 2.9** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *ma granicę* $g$, *to ciąg* $(|a_n|)$ *ma granicę* $|g|$.

**Zadanie 2.10** *Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi*

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \wedge \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2} \tag{2.54}$$

# Wykład 3

# 2002.10.21 / 3h

## 3.1 Ciągi liczbowe c.d.

**Twierdzenie 3.1** *Jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny i zachodzi* $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{k\geqslant n} a_k \geqslant 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

**Wniosek 3.1** *Jeżeli ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_n)$ *są zbieżne i zachodzi* $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{k\geqslant n} a_k \leqslant b_k$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

**Twierdzenie 3.2** ***(Twierdzenie o trzech ciągach.)***
*Jeżeli ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_n)$ *są zbieżne i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *oraz zachodzi* $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{k\geqslant n} a_k \leqslant c_k \leqslant b_k$, *to ciąg* $(c_n)$ *jest zbieżny oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

**Definicja 3.1** *Dane są ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_k)$. *Mówimy, że ciąg* $(b_k)$ *jest podciągiem ciągu* $(a_n)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych* $(n_k)$ *taki, że*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k} = b_k \tag{3.1}$$

**Twierdzenie 3.3** *Ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny i ich granice są równe.*

**Twierdzenie 3.4** ***(Bolzano - Weierstrassa)*** *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

**Twierdzenie 3.5** *(i) Każdy ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny.*
*(ii) Każdy ciąg nierosnocy i ograniczony z dołu jest zbiezny.*

**Wniosek 3.2** *Każdy ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

**Definicja 3.2** *Mówimy, że ciąg* $(a_n)$ *jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni m,k\geqslant n} |a_m - a_k| < \varepsilon \tag{3.2}$$

**Twierdzenie 3.6** ***(Cauchy'ego)*** *Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

**Twierdzenie 3.7** *Ciąg* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy e.*

## 3.2 Zadania

**Zadanie 3.1** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny, to zbieżny jest ciąg* $(|a_n|)$ *oraz zachodzi* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

**Zadanie 3.2** *Udowodnić 3.5 (ii).*

**Zadanie 3.3** *Udowodnić jeżeli ciąg jest niemalejący (odpowiednio) nierosnącym i ograniczonym z góry (dołu), to jego granica jest nie mniejsza (nie większa) niż dowolny jego wyraz.*

**Zadanie 3.4** *Udowodnić, że jeżeli* $p > 0$, *to ciąg* $(\sqrt[n]{p})$ *ma granicę równą 1.*

**Zadanie 3.5** *Udowodnić, że ciąg* $(\sqrt[n]{n})$ *ma granicę równą 1.*

**Zadanie 3.6** *Udowodnić, że jeżeli* $|p| < 1$ *to* $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$.

**Zadanie 3.7** *(**Lemat Teopliza**) Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczb nieujemnych. Niech* $b_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *oraz* $b_n > 0$ *dla wszystkich naturalnych* $n$ *i ciąg* $(b_n)$ *będzie rosnący i rozbieżny do* $+\infty$. *Jeżeli ciąg* $(x_n)$ *jest ciągiem liczbowym zbieżnym takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *to zbieżny jest ciąg* $\left(\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x \tag{3.3}$$

**Zadanie 3.8** *(**Twierdzenie o granicy średnich arytmetycznych**) Niech ciąg* $(a_n)$ *będzie zbieżny w szerszym sensie. Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = g$.

**Uwaga 3.1** *Zauważyć, że jest to szczególny przypadek lematu Teopliza. Przeprowadzić również dowód nie korzystając z lematu Teopliza.*

**Zadanie 3.9** *(**Twierdzenie o granicy średnich geometrycznych**) Niech ciąg* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczb dodatnich i zbieżnym w szerszym sensie. Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = g$.

**Zadanie 3.10** *Niech ciąg* $(a_{n+1} - a_n)$ *będzie zbieżny. Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

**Uwaga 3.2** *Skorzystać z twierdzenia o średniej arytmetycznej.*

**Zadanie 3.11** *Niech ciąg* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczb dodatnich. Niech ponadto ciąg* $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *będzie ciągiem zbieżnym. Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

**Uwaga 3.3** *Skorzystać z twierdzenia o średniej geometrycznej.*

**Zadanie 3.12** *(**Twierdzenie Stolza**) Niech ciąg* $(a_n)$ *będzie ciągiem rosnącym rozbieżnym do nieskończoności. Jeżeli ciąg* $\left(\frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}\right)$ *jest zbieżny w szerszym sensie i* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}}\right) = g$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = g$.

**Uwaga 3.4** *Wykorzystać lemat Teopliza. Przeprowadzić również dowód nie korzystając z lematu Teopliza.*

# Wykład 4

# 2002.10.28 / 3h

## 4.1 Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych

Określimy rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych tzn liczby rzeczywiste z plus i minus nieskończonościami.

**Definicja 4.1**

$$\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \tag{4.1}$$

**Uwaga 4.1** *Przyjmujemy konwencję*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} - \infty < a \wedge a < +\infty \tag{4.2}$$

*oraz dla obu symboli nieskończonych i dowolnej liczby rzeczywistej $a$ określone są następujące działania*

$$a + (+\infty) \overset{\text{def}}{=} +\infty \tag{4.3}$$

$$a - (-\infty) \overset{\text{def}}{=} +\infty \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{\pm\infty} \overset{\text{def}}{=} 0 \tag{4.5}$$

$$a \cdot (+\infty) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} +\infty & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -\infty & \text{dla } a < 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$a \cdot (-\infty) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -\infty & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ +\infty & \text{dla } a < 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

**Uwaga 4.2** *Dla zbioru nieograniczonego z góry (dołu) będziemy mówili i pisali, że kres górny (dolny) tego zbioru jest równy $+\infty$ ($-\infty$).*

**Uwaga 4.3** *Nieskończoność pozwalają określić kres dolny i górny zbioru pustego, a mianowicie*

$$\inf\emptyset = +\infty \wedge \sup\emptyset = -\infty \tag{4.8}$$

## 4.2 Ciągi rozbieżne do nieskończoności

**Definicja 4.2** *Mówimy, że ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny do $+\infty$ (plus nieskończoności)*

$$\forall_{r\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni k>n} a_n > r \tag{4.9}$$

*Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.*

*Mówimy, że ciąg $(a_n)$ jest rozbieżny do $-\infty$ (minus nieskończoności)*

$$\forall_{r\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni k>n} a_n < r \tag{4.10}$$

*Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*

**Definicja 4.3** *Mówimy, że ciąg ma granicę niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozbieżny do plus bądź minus nieskończoności.*

*Mówimy, że ciąg jest zbieżny w szerszym sensie wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny bądź ma granicę niewłaściwą.*

**Uwaga 4.4** *Istnieją ciągi, które nie są zbieżne w szerszym sensie. Mogą być zarówno ograniczone jak i nieograniczone.*

**Przykład 4.1** *(i) Ciąg, którego wyrazy są określony wzorem $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony i nie jest zbieżny ani rozbieżny do nieskończoności.*

*(ii) Ciąg, którego wyrazy są określony wzorem $a_n = (-1)^n n$ jest nieograniczony i nie jest rozbieżny do plus bądź minus nieskończoności.*

**Twierdzenie 4.1** *Każdy ciąg rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$ jest niegoraniczony z góry (z dołu).*

**Twierdzenie 4.2** *Ciąg niemalejący nieograniczony z góry jest rozbieżny do $+\infty$*

**Uwaga 4.5** *Każdy ciąg rozbieżny do $+\infty$ jest nieograniczony z dołu, ale nie musi być niemalejący.*[1]

**Twierdzenie 4.3** *Ciąg malejący nieograniczony z dołu jest rozbieżny do $-\infty$.* [2]

**Twierdzenie 4.4** *Jeżeli ciąg $(a_n)$ ma granicę nieskończoną, to ciąg będący jego odwrotnością jest zbieżny i ma granicę równa zero.*

**Uwaga 4.6** *Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, o czym przekonuje poniższy przykład.*

**Przykład 4.2** *Niech $(a_n)$ będzie ciągiem, którego wyrazy określone są następująco*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{1}{(-1)^n n} \tag{4.11}$$

## 4.3 Granica górna i dolna ciągu.

**Definicja 4.4** *Dany jest ciąg $(a_n)$.*

*Granica górna ciągu (oznaczamy ją $\limsup$) jest to liczba rzeczywista bądź nieskończoność (plus bądź minus) w przypadku ciągu nieograniczonego określona równością*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geqslant n} a_k) = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqslant n} a_k) \tag{4.12}$$

*Granica dolna ciągu (oznaczamy ją $\liminf$) jest to liczba rzeczywista bądź nieskończoność (plus bądź minus) w przypadku ciągu nieograniczonego określona równością*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geqslant n} a_k) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqslant n} a_k) \tag{4.13}$$

**Uwaga 4.7** *Ponieważ ciąg $(g_n)$ określony wzorem $g_n = \sup_{k\geqslant n}\{a_k\}$ jest nierosnącym, to jeśli jest ograniczony z dołu, to jest zbieżny*[3]*, a jeżeli nie jest ograniczony z dołu to jest rozbieżny do $-\infty$.*

*Podobnie ciąg $(d_n)$ określony wzorem $d_n = \inf_{k\geqslant n}\{a_k\}$ jest niemalejący, to jeśli jest ograniczony z góry, to jest zbieżny*[4]*, a jeżeli nie jest ograniczony z góry to jest rozbieżny do $+\infty$.*

**Przykład 4.3** *Niech $a_n = (-1)^n$. Wówczas $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ oraz $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.*

**Przykład 4.4** *Niech $a_n = n^{(-1)^n}$. Wówczas $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oraz $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.*

---

[1] $a_1 = 2, a_2 = 1$ oraz $a_n = n$ dla $n \geqslant 3$.

[2] Podobna fakt jest prawdziwy jak uwadze 4.5

[3] Przyjmujemy konwencję, że jeżeli $g_n = +\infty$ dla dowolnego naturalnego $n$, to ciąg jest ograniczony z dołu i ciąg ma granicę równą plus nieskończoność.

[4] Przyjmujemy konwencję, że jeżeli $d_n = -\infty$ dla dowolnego naturalnego $n$, to ciąg jest ograniczony z góry i ciąg ma granicę równą minus nieskończoność.

**Twierdzenie 4.5** *Niech $(a_n)$ będzie ciągiem. Wówczas*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\left\{g : \exists_{(n_k)} a_{n_k} \text{ jest podciągiem zbieżnym w szerszym sensie } \wedge \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g\right\} \tag{4.14}$$

*Ponadto kres jest osiągalny w zbiorze tzn. istnieje podciąg $(a_{n_k})$ zbieżny w szerszym sensie taki, że $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\left\{g : \exists_{(n_k)} a_{n_k} \text{ jest podciągiem zbieżnym w szerszym sensie } \wedge \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g\right\} \tag{4.15}$$

*Ponadto kres jest osiągalny w zbiorze tzn. istnieje podciąg $(a_{n_k})$ zbieżny w szerszym sensie taki, że $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$*

**Uwaga 4.8** *Granica górna (dolna) jest granicą podciągu zbieżnego w szerszym sensie danego ciągu i jest to największa (najmniejsza) z granic zbieżnych w szerszym sensie podciągów danego ciągu.*

**Wniosek 4.1** *Jeżeli dla ciągu $(a_n)$ zachodzi $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, to ciąg jest zbieżny w szerszym sensie i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$*

**Wniosek 4.2** *Jeżeli ciąg $(a_n)$ jest zbieżny w szerszym sensie, to $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

**Wniosek 4.3** *Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy granica górna jest równa granicy dolnej.*

**Twierdzenie 4.6** *Niech ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$ będą dowolne. Wówczas*

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n \tag{4.16}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{4.17}$$

## 4.4 Szeregi liczbowe

**Definicja 4.5** *Niech $(a_n)$ będzie ciągiem liczbowym. Ciągiem sum częściowych nazywamy ciąg $(S_n)$, którego wyrazy określone są wzorem*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{4.18}$$

**Definicja 4.6** *Niech $(a_n)$ będzie dowolnym ciągiem, zaś $(S_n)$ będzie ciągiem jego sum częściowych. Szeregiem liczbowym nazywamy parę uporządkowaną $((a_n), (S_n))$ i oznaczamy go $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

**Definicja 4.7** *Mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych jest zbieżny.*

*Sumą szeregu nazywamy granicę sum cząsciowych tego szeregu.*

**Uwaga 4.9** *W literaturze sumę szeregu i szereg zwykle oznacza się tak samo.*

**Przykład 4.5** *Dla szeregu geometrycznego $a_n = aq^n$ mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{dla } |q| < 1 \wedge a \in \mathbb{R} \\ (+\infty)\cdot \operatorname{sign}(a) & \text{dla } q \geqslant 1 \wedge a \in \mathbb{R} \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } q \leqslant -1 \wedge a \neq 0 \\ 0 & \text{dla } q \leqslant -1 \wedge a = 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

**Definicja 4.8** *Dany jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $n$ - tą resztą szeregu nazywamy wielkość (szereg)*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{4.20}$$

**Twierdzenie 4.7** *Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to ciąg $n$ - tych reszt jest zbieżny do zera.*

**Twierdzenie 4.8** *(**Warunek konieczny zbieżności szeregu.**) Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*

## 4.5 Zadania

**Zadanie 4.1** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny i ma granicę równą zero oraz spełnia jeden z warunków*

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{k\geqslant n}a_k > 0 \tag{4.21}$$

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{k\geqslant n}a_k < 0, \tag{4.22}$$

*to ciąg będący modułem jego odwrotnością jest rozbieżny do plus nieskończoności*

**Zadanie 4.2** *Udowodnić twierdzenie 4.4 dla ciągów rozbieżnych do* $-\infty$.

**Zadanie 4.3** *Niech ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_n)$ *będą dowolne. Udowodnić zależności*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \tag{4.23}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \leqslant b_n \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n, \tag{4.24}$$

*gdzie nierówność (4.23) określona jest dla takich ciągów, dla których lewa strona nie jest postaci* $\infty - \infty$.

**Zadanie 4.4** *Udowodnić, że istnieją takie ciągi, że w (4.23) nierówność jest ostra.*

**Zadanie 4.5** *Udowodnić, że dla dowolnego ciągu* $(a_n)$ *liczb dodatnich prawdziwe są nierówności*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{4.25}$$

**Zadanie 4.6** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$ *oraz ciąg* $(b_n)$ *jest ograniczony z dołu, to ciąg* $(a_n + b_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$.

**Zadanie 4.7** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest rozbieżny do* $-\infty$ *oraz ciąg* $(b_n)$ *jest ograniczony z góry, to ciąg* $(a_n + b_n)$ *jest rozbieżny do* $-\infty$.

**Zadanie 4.8** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$ *oraz ciąg* $(b_n)$ *od pewnego miejsca jest dodatni, to ciąg* $(a_n \cdot b_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$.

**Zadanie 4.9** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$ *oraz ciąg* $(b_n)$ *od pewnego miejsca jest ujemny, to ciąg* $(a_n \cdot b_n)$ *jest rozbieżny do* $-\infty$.

**Zadanie 4.10** *Udowodnić, że jeżeli ciąg* $(a_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$ *oraz ciąg* $(b_n)$ *jest taki, że od pewnego miejsca zachodzi nierówność* $a_n \leqslant b_n$, *to ciąg* $(b_n)$ *jest rozbieżny do* $+\infty$.

**Zadanie 4.11** *Udowodnić, że jeśli ciąg* $(a_n)$ *jest zbieżny i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *a ciąg* $(b_n)$ *jest ograniczony, to ciąg* $(a_n \cdot b_n)$ *jest zbieżny i ma granicę równą zero.*

**Zadanie 4.12** *(i) Niech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$ *Czy można stąd wnioskować, że* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *lub* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*?*

*(ii) Ciągi* $a_n$ *i* $b_n$ *są rozbieżne. Co można powiedzieć o zbieżności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu tych ciągów?*

*(iii) Ciąg* $a_n$*jest zbieżny, a ciąg* $b_n$ *rozbieżny. Co można powiedzieć o zbieżności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu tych ciągów?*

# Wykład 5

# 2002.11.04 / 3h

## 5.1 Zbieżność szeregów liczbowych

**Twierdzenie 5.1** ***(Kryterium Cauchy'ego.)***
*Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\mathbb{N}\ni k} \forall_{\mathbb{N}\ni n\geqslant m\geqslant k} \left| \sum_{l=m}^{n} a_l \right| < \varepsilon \tag{5.1}$$

**Uwaga 5.1** *Warunek z kryterium Cauchy'ego można napisać w innej postaci*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\mathbb{N}\ni k} \forall_{\mathbb{N}\ni m} \left| \sum_{l=0}^{m} a_{k+l} \right| < \varepsilon \tag{5.2}$$

**Twierdzenie 5.2** ***(Działania na szeregach zbieżnych.)***
*Jeżeli szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżny, to*
*(i) zbieżny jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \tag{5.3}$$

*(ii) zbieżny jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ *oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) - \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) \tag{5.4}$$

*(iii) dla dowolnej liczby rzeczywistej c zbieżny jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ *oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right). \tag{5.5}$$

*W szczególności zbieżny jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ *oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = -\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right). \tag{5.6}$$

**Definicja 5.1** *Szereg liczbowy nazuwamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych jest ograniczony.*

**Twierdzenie 5.3** *Każdy szereg zbieżny jest ograniczony.*

**Definicja 5.2** *Mówimy, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest nieujemny (dodatni) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej* $a_n \geqslant 0$ $(a_n > 0)$.

**Twierdzenie 5.4** *Szereg nieujemny jest zbieżny, bądź rozbieżny do* $+\infty$.

**Twierdzenie 5.5** *Szereg nieujemny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

**Twierdzenie 5.6** ***(Kryterium porównawcze zbieżności szeregu ((i) - kryterium Weierstrassa).)***

*Dane są szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

*(i) Jeśli spełnione są warunki*

$$\exists_{k\in\mathbb{N}} \forall_{\mathbb{N}\ni n\geqslant k} |a_n| \leqslant b_n, \tag{5.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{- zbieżny,} \tag{5.8}$$

*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

*(ii) Jeśli spełnione są warunki*

$$\exists_{k\in\mathbb{N}} \forall_{\mathbb{N}\ni n\geqslant k} 0 \leqslant a_n \leqslant b_n, \tag{5.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{- rozbieżny,} \tag{5.10}$$

*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny.*

**Definicja 5.3** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywamy bezwzględnie zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny.*

**Wniosek 5.1** *Każdy szereg bezwględnie zbieżny jest zbieżny.*

**Twierdzenie 5.7** ***(Kryterium zgęszczania Cauchy'ego.)***

*Niech ciąg* $(a_n)$ *będzie ciągiem nierosnącym i nieujemnym. Wówczas szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ jest zbieżny} \tag{5.11}$$

**Wniosek 5.2** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *jest zbieżny dla* $p > 1$ *i rozbieżny dla* $p \leqslant 1$.

**Wniosek 5.3** *(**Udowodnić.**) Szereg* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ *jest zbieżny dla* $p > 1$ *i rozbieżny dla* $p \leqslant 1$.

**Twierdzenie 5.8** ***(Kryterium Cauchy'ego II.)***

*Dany jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Niech* $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *wówczas, jeśli*

*(i)* $\alpha < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

*(ii)* $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny*

*(iii)* $\alpha = 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *może być zbieżny lub rozbieżny (nie rozstrzyga)*

**Przykład 5.1** *Dla szeregów*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ i } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{5.12}$$

*kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga ich zbieżności.*

**Twierdzenie 5.9** ***(Kryterium d'Alemberta.)***

*Dany jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Wówczas, jeśli*

*(i)* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

*(ii)* $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny*

**Przykład 5.2** *Dany jest ciąg* $(a_n)$ *określony następująco*

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{dla } n = 2k-1 \\ \frac{1}{3^k} & \text{dla } n = 2k \end{cases}. \tag{5.13}$$

*Wówczas*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \wedge \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \tag{5.14}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5.15}$$

**Twierdzenie 5.10** *Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze od kryterium d'Alemberta. (Jeśli kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga, to nie rozstrzyga również kryterium d'Alemberta).*

**Twierdzenie 5.11** ***(Kryterium Kummera.)***

*Szereg dodatni* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg liczb dodatnich takich, że*

$$\lim_{n\to\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) > 0 \tag{5.16}$$

**Wniosek 5.4** ***(Kryterium Raabego.)***

*Jeśli szereg dodatni* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *spełnia warunek*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1, \tag{5.17}$$

*to jest zbieżny.*

## 5.2 Zadania

**Zadanie 5.1** *Udowodnić, że*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{5.18}$$

**Zadanie 5.2** *Podać przykład szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich, dla którego ciąg* $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *nie jest zbieżny.*

**Zadanie 5.3** *Niech szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie o wyrazach nieujemnych. Udowodnić, że z jego zbieżności wynika zbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$

**Zadanie 5.4** *Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczb dodatnich, zaś* $(s_n)$ *będzie ciągiem jego sum częściowych. Niech ponadto szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie rozbieżny.*

*(i) Udowodnić, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ *jest rozbieżny.*

*(ii) Udowodnić, że*

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \ldots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geqslant 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

*i wywnioskować stąd, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ *jest rozbieżny.*

*(iii) Udowodnić, że*

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

*i wywnioskować stąd, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ *jest zbieżny.*

**Zadanie 5.5** *Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczb dodatnich, zaś szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie zbieżny. Połóżmy* $r_n \equiv \sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m$.

*(i) Udowodnić, że dla* $m < n$

$$\frac{a_m}{r_m} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$

*i wywnioskować stąd, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ *jest rozbieżny.*

*(ii) Udowodnić, że*

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$$

*i wywnioskować stąd, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ *jest zbieżny.*

**Zadanie 5.6** *Niech będą dane dwa szeregi o wyrazach nieujemnych* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Załóżmy, że ciąg* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *jest zbieżny w szerszym sensie oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

*Wówczas jeśli* $K < +\infty$, *to ze zbieżności szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *a gdy* $K > 0$, *to rozbieżności szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika rozbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Zadanie 5.7** *Korzystając z charakteryzacji - definicji liczby e przez szereg udowodnić, że jest to liczba niewymierna.*

**Zadanie 5.8** *Udowodnić, że zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pociąga zbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *o ile* $a_n \geqslant 0$.

**Zadanie 5.9** *Wykazać, że jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *są zbieżne, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny,* $a_n, b_n \geqslant 0$ *dla dowolnych* $n \in \mathbb{N}$.

# Wykład 6

# 2002.11.11 – Dzień wolny

# Wykład 7

# 2002.11.18 / 3h

## 7.1 Szeregi zbieżne (szeregi naprzemienne i warunkowo zbieżne; iloczyn Cauchy'ego)

**Lemat 7.1** ***(Abela o sumowaniu częściowym.)***

*Dane są ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_n)$*. Niech* $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *oraz* $A_{-1} = 0$*. Wówczas dla dowolnych* $p, q$ *takich, że* $1 \leqslant p \leqslant q$ *zachodzi*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \tag{7.1}$$

**Twierdzenie 7.1** ***(Kryterium Abela - Dirichleta.)*** *Dane są ciągi* $(a_n)$ *i* $(b_n)$*. Niech* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$*. Jeżeli*

*(i) ciąg* $(A_n)$ *jest ograniczony*

*(ii) ciąg* $(b_n)$ *jest nierosnący*

*(iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*, to*

*szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

**Wniosek 7.1** *Twierdzenie 7.1 pozostaje słuszne jeśli warunek (ii) zastąpimy następującym*

*(ii)′ ciąg* $(b_n)$ *jest niemalejący.*

**Twierdzenie 7.2** ***(Kryterium Leibniza.)***

*Dany jest ciąg* $(a_n)$ *Jeżeli spełnia on warunki*

*(i) ciąg* $(a_n)$ *jest monotoniczny*

*(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, to*

*szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *jest zbieżny.*

**Definicja 7.1** *Szereg postaci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{7.2}$$

*gdzie wyrazy ciągu* $(a_n)$ *mają stale jednakowy znak nazywamy szeregiem naprzemiennym.*

**Definicja 7.2** *Mówimy, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest warunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest rozbieżny i szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

**Przykład 7.1** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *jest warunkowo zbieżny.*

**Twierdzenie 7.3** ***(Twierdzenie Riemanna)*** *Niech szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie zbieżny warunkowo i niech* $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$ *będą dane. Wówczas istnieje taka permutacja*[1] *zbioru liczb naturalnych* $\sigma$ *(dowolne przestawienie wyrazów ciągu tworzącego szereg), że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *o sumach częściowych* $\mathbf{S}_n$ *ma własność*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{S}_n = \alpha \wedge \limsup_{n\to\infty} \mathbf{S}_n = \beta \tag{7.3}$$

**Definicja 7.3** *Iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *nazywamy taki szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *wyrazy którego określone są następująco*

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{7.4}$$

**Twierdzenie 7.4** ***(Twierdzenie Cauchy'ego)***

*Jeżeli*

*(i) szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$

*(ii) szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$

*wówczas szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *będący iloczynem Cauchy'ego danych szeregów jest zbieżny i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Założenie, że jeden z szeregów jest bezwzględnie zbieżny jest konieczne.

**Przykład 7.2** *Rozważmy szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. *n - ty wyraz iloczynu Cauchy'ego przez siebie tego szeregu wyraża się wzorem*

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

*i zachodzi następujące oszacowanie*

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

*i nie spełnia warunku koniecznego zbieżności szeregu.*

**Twierdzenie 7.5** ***(Abela*** **<u>*(bez dowódu).*</u>***)*** *Jeśli szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *są zbieżne do* $A, B, C$ *i szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *jest iloczynem Cauchy'ego dwóch pozostałych, to AB=C.*

**Uzupełnienie**

**Stwierdzenie 7.1** *Szereg nieujemny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.*

## 7.2 Szeregi potęgowe

**Definicja 7.4** *Niech dany będzie ciąg liczbowy* $(a_n)$ *oraz liczba* $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest ustalone, zaś* $x$ *może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{7.5}$$

*nazywamy szeregiem potęgowym, liczby* $a_n$ *nazywamy współczynnikami tego szeregu.*

**Uwaga 7.1** *Szereg jest pewnym odwzorowaniem (funkcją) określoną następująco*

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{7.6}$$

[1]Permutacją zbioru nazywamy dowolną funkcję z tego zbioru w ten sam zbiór, która jest różnowartościowa i *"na"*.

**Twierdzenie 7.6** ***(Cauchy'ego - Hadamarda)***

*Niech dany będzie szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. *Niech*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \wedge \mathcal{R} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & dla\ \alpha \neq 0 \\ 0 & dla\ \alpha = +\infty \\ \infty & dla\ \alpha = 0 \end{cases}. \tag{7.7}$$

*Wówczas szereg jest zbieżny dla* $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \mathcal{R}\}$ *i rozbieżny dla* $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > \mathcal{R}\}$.

**Uwaga 7.2** *Liczbę* $\mathcal{R}$ *występującą w twierdzeniu Cauchy'ego - Hadamarda nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego.*

## 7.3 Zadania

**Zadanie 7.1** *Dokończyć dowód twierdzenia Riemanna 7.3*

**Zadanie 7.2** *Udowodnić, że wartość bezwzględna sumy szeregu bezwzględnie zbieżnego jest nie większa niż suma szeregu wartości bezwzględnych.*

# Wykład 8

# 2002.11.25 / 3h

## 8.1 Szeregi potęgowe c.d.

**Przykład 8.1** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *ma promień zbieżności równy 1 oraz jest zbieżny dla* $x = -1$ *i rozbieżny dla* $x = 1$.

**Twierdzenie 8.1** *Szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny w swoim kole zbieżności tzn. w zbiorze* $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \mathcal{R}\}$

**Wniosek 8.1** *Jeżeli oznaczymy przez* $\beta \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *(o ile ten ciąg jest zbieżny w szerszym sensie), to promień zbieżności szeregu potęgowego wyraża się wzorem*

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \textit{dla } \beta \neq 0 \\ 0 & \textit{dla } \beta = +\infty \\ +\infty & \textit{dla } \beta = 0 \end{cases}. \tag{8.1}$$

## 8.2 Elementy topologii

**Uwaga 8.1** *W zbiorze liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ *wartość bezwzględna spełnia następujące warunki (między innymi)*

$$\forall_{x,\in\mathbb{R}} |x| \geqslant 0 \tag{8.2}$$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{8.3}$$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} |x - y| = |y - x| \tag{8.4}$$

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \tag{8.5}$$

*Możemy więc określić odwzorowaniem z* $d_{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *wzorem*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} d_{\mathcal{E}}(x, y) = |x - y|. \tag{8.6}$$

**Uwaga 8.2** *Z algebry liniowej wiadomo, że dla dowolnej liczby zespolonej z określa się jej moduł następująco*

$$|z| = \sqrt[2]{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}, \tag{8.7}$$

*gdzie* $\Re z$ *jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej* $z$*, zaś* $\Im z$ *jest częścią urojoną tej liczby. Spełnia on wówczas następujące warunki (między innymi)*

$$\forall_{x,\in\mathbb{C}} |x| \geqslant 0 \tag{8.8}$$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{C}} |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{8.9}$$

$$\forall_{x,y\in\mathbb{C}} |x - y| = |y - x| \tag{8.10}$$

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{C}} |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \tag{8.11}$$

*Możemy więc określić odwzorowaniem z* $d_{\mathcal{E},\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *wzorem*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{C}} d_{\mathcal{E},\mathbb{C}}(x, y) = |x - y|. \tag{8.12}$$

Ogólniej możemy zdefiniować przestrzeń metryczną następująco:

**Definicja 8.1** *Niech $X$ będzie zbiorem niepustym, zaś $d$ odwzorowaniem z $X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Parę $(X, d)$ nazywamy przestrzenią metryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $d$ spełnia następujące warunki*

$$\forall_{x,y \in X} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{8.13}$$

$$\forall_{x,y \in X} d(x, y) = d(y, x) \tag{8.14}$$

$$\forall_{x,y,z \in X} d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z). \tag{8.15}$$

*Elementy zbioru $X$ nazywamy punktami przestrzeni.*

**Definicja 8.2** *Jedonowymiarową przestrzenią euklidesową $\mathcal{E}^1$ nazywamy przestrzeń przestrzeń*

$$\mathcal{E}^1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}, d_{\mathcal{E}}) \equiv (\mathbb{R}, |\cdot|) \tag{8.16}$$

**Definicja 8.3** *Jednowymiarową przestrzenią zespolona $\mathcal{C}^1$ nazywamy przestrzeń przestrzeń*

$$\mathcal{C}^1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}, d_{\mathcal{E},\mathbb{C}}) \equiv (\mathbb{C}, |\cdot|) \tag{8.17}$$

**Uwaga 8.3** *Jeżeli rozpatrujemy rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\overline{\mathbb{R}}$, to można określić w nim metrykę następująco:*

$$\forall_{x,y \in \overline{\mathbb{R}}} d_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|, \tag{8.18}$$

*gdzie przyjmujemy konwencję $\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ oraz $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$[1]. Kulami otwartymi są wtedy albo zwykle kule, albo półproste, albo cała prosta rozszerzona.*

**Definicja 8.4** *Jednowymiarową rozszerzoną przestrzenią euklidesową nazywamy przestrzeń metryczną*

$$\overline{\mathcal{E}^1} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathbb{R}}, d_{\overline{\mathbb{R}}}) \tag{8.19}$$

Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną (dla ułatwienia można cały czas rozważać wyłącznie $\mathcal{E}^1$ i $\overline{\mathcal{E}^1}$).

**Definicja 8.5** *Kulą otwartą ośrodku w punkcie $x_0$ o dodatnim promieniu $r$ nazywamy zbiór określony równością*

$$B(x_0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \tag{8.20}$$

*Kulą domkniętą ośrodku w punkcie $x_0$ o dodatnim promieniu $r$ nazywamy zbiór określony równością*

$$\overline{B(x_0, r)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant r\} \tag{8.21}$$

**Uwaga 8.4** *W przypadku przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$ jest to odcinek o środku w $x_0$ i długości $2r$.*

**Definicja 8.6** *Zbiór $A \subset X$ w przestrzeni metrycznej nazywamy otwartym w (X,d) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{p \in A} \exists_{r>0} B(p, r) \subset A. \tag{8.22}$$

**Definicja 8.7** *Zbiór $A$ nazywamy domkniętym w (X,d) wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem otwartym w (X,d).*

**Wniosek 8.2** *Zbiory $\emptyset$ oraz $X$ są otwarte w (X,d).*

**Wniosek 8.3** *Zbiory $\emptyset$ oraz $X$ są domknięte w (X,d).*

**Wniosek 8.4** *Kula otwarta w przestrzeni metrycznej w (X,d) jest zbiorem otwartym w (X,d).*

**Twierdzenie 8.2** *Kula domknięta w przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym w (X,d).*

[1] Funkcja arctg (arcus tangens) jest to funkcja odwrotna do funkcji tanges na przedziale $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**Twierdzenie 8.3** *(i) Dla dowolnej rodziny* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset 2^X$ *zbiorów otwartych w (X,d) zbiór* $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} A_i$ *jest otwarty w (X,d).*

*(ii) Dla dowolnej skończonej rodziny* $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset 2^X$ *zbiorów otwartych w (X,d) zbiór* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *jest otwarty w (X,d).*

**Wniosek 8.5** *(i) Dla dowolnej rodziny* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset 2^X$ *zbiorów domkniętych w (X,d) zbiór* $\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} A_i$ *jest domknięty w (X,d).*

*(ii) Dla dowolnej skończonej rodziny* $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset 2^X$ *zbiorów domkniętych w (X,d) zbiór* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *jest domknięty w (X,d).*

**Wniosek 8.6** *Następujące odcinki są zbiorami otwartymi* $]a,b[\ ,]-\infty,a[,\ ]a,+\infty[$ *oraz* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

**Wniosek 8.7** *Następujące odcinki są zbiorami domkniętymi* $[a,b]\ ,]-\infty,a],\ [a,+\infty[$ *oraz* $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

**Twierdzenie 8.4** *Dla dowolnych dwóch różnych punktów p i q przestrzeni metrycznej (X,d) istnieją zbiory* $\mathcal{O}_p$ *i* $\mathcal{O}_q$ *otwarte w (X,d) takie, że*

$$p \in \mathcal{O}_p \wedge q \in \mathcal{O}_q \wedge \mathcal{O}_p \cap \mathcal{O}_q = \emptyset \tag{8.23}$$

**Definicja 8.8** *(i) Otoczeniem punktu p nazywamy dowolny podzbiór* $\mathcal{O}_p \subset X$*, dla którego istnieją kula otwarta* $B(p,r)$ *taka, że* $B(p,r) \subset \mathcal{O}_p$.

*(ii) Otoczeniem otwartym punktu p nazywamy dowolne otoczenie punktu p będące zbiorem otwartym w (X,d).*

*(iii) Punkt p nazywamy punktem wewnętrznym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie otwarte tego punktu* $\mathcal{O}_p$ *zawarte w tym zbiorze.*

**Przykład 8.2** *Dla punkty* 1 *zbiór* $[1,2]$ *nie jest otoczeniem, zbiór* $[0,2]$ *jest otoczeniem, ale nie jest otoczeniem otwartym, zaś* $]0,2[$ *jest otoczeniem otwartym.*

**Przykład 8.3** *Dla zbioru* $A=[1,2]$ *punkty wewnętrzne, to punkty z odcinka otwartego* $]1,2[$

**Wniosek 8.8** *Każdy punkt zbioru otwartego w (X,d) jest punktem wewnętrznym.*

**Wniosek 8.9** *Zbiór jednopunktowy jest zbiorem domkniętym w przestrzeni metrycznej.*

**Uwaga 8.5** *Pojęcie zbieżności ciągu w* $\mathbb{R}$*, granicy oraz ciągu Cauchy'ego można przenieść na przestrzenie metryczne.*

**Definicja 8.9** *Ciąg* $(x_n)$ *punktów przestrzeni metrycznej (X,d) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{x\in X}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} d(x,x_n) < \varepsilon \tag{8.24}$$

*Zbieżny ciąg* $(x_n)$ *punktów przestrzeni metrycznej (X,d) ma granicę równą x wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N} d(x,x_n) < \varepsilon \tag{8.25}$$

*Ciąg punktów* $(x_n)$ *przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni n,m>N} d(x_m,x_m) < \varepsilon. \tag{8.26}$$

**Definicja 8.10** *Jeżeli w przestrzeni metrycznej (X,d) każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do X, to przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy zupełną.*

**Twierdzenie 8.5** *Jednowymiarowa przestrzeń euklidesowa* $\mathcal{E}^1$ *jest zupełna.*

**Twierdzenie 8.6** *Zbiór A jest domknięty w* $(X,d)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów tego zbioru jego granica należy do tego zbioru.*

**Definicja 8.11** *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej. Domknięciem zbioru A nazywamy najmniejszy zbiór domknięty w (X,d) zawierający zbiór A. Oznaczmy go przez* $\mathrm{Cl}\,A$.

**Wniosek 8.10** *Domknięcie zbioru domkniętego w (X,d) jest tym samym zbiorem.*

**Definicja 8.12** *(i) Punkt p nazywamy punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{r>0} A \cap (B(p,r) \setminus \{p\}) \neq \emptyset \tag{8.27}$$

*(ii) Punkt p nazywamy punktem izolowanym zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy p nie jest punktem skupienia tego zbioru tzn.*

$$\exists_{r>0} A \cap (B(p,r) \setminus \{p\}) = \emptyset \tag{8.28}$$

**Uwaga 8.6** *Warunek (8.27) można zapisać następująco*

$$\forall_{r>0} \exists_{x \in A} p \neq x \wedge d(p,x) < r \tag{8.29}$$

**Uwaga 8.7** *Warunek (8.29), a co za tym (8.27) mówi, że punkt p jest granicą ciągu punktów z A różnych od p.*

**Przykład 8.4** *Dla zbioru* $A = \{0\} \cup [1,2]$ *punkt* $0$ *jest punktem izolowanym, zaś dowolny punkt odcinak* $[1,2]$ *jest punktem skupienia.*

**Twierdzenie 8.7** *Jeżeli p jest punktem skupienia zbioru A, to dowolne otoczenie punktu p zawiera nieskończenie wiele punktów ze zbioru A.*

**Wniosek 8.11** *Zbiór skończony nie ma punktów skupienia.*

## 8.3 Zadania

**Zadanie 8.1** *Udowodnić twierdzenie 8.7.*

**Zadanie 8.2** *Skonstruować ograniczony zbiór liczb rzeczywistych posiadający dokładnie trzy punkty skupienia.*

**Zadanie 8.3** *Wyznaczyć wszystkie punkty skupienia zbioru liczb całkowitych i naturalnych w* $\overline{\mathcal{E}}^1$.

**Zadanie 8.4** *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, że*

$$\forall_{p,q,r \in X} |d(p,q) - d(q,r)| \leqslant d(p,r) \tag{8.30}$$

# Wykład 9

# 2002.12.02 / 3h

## 9.1 Elementy topologii c.d.

**Twierdzenie 9.1** *Niech $A$ będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej, zaś $\tilde{A}$ będzie zbiorem jego punktów skupienia. Zbiór przestrzeni metryczne (X,d) jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{A} \subseteq A$.*

**Przykład 9.1** *Przestrzeń metryczna $(\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$, gdzie $\forall_{x,y\in\mathbb{Q}} d_{\mathbb{Q}}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|$ nie jest zupełna, gdyż ciąg rozwinięć dziesiętnych liczby niewymiernej jest ciągiem Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w tej przestrzeni.*

**Twierdzenie 9.2** *$\overline{\mathcal{E}^1}$ jest przestrzenia metryczną zupełną.*

**Uwaga 9.1** *Ciągi zbieżne w $\overline{\mathcal{E}^1}$ są to ciągi rzeczywiste zbieżne w szerszym sensie (jak również ciągi zbieżne w szerszym sensie zawierające skończoną ilość wyrazów równych $\pm\infty$) oraz ciągi od pewnego miejsca równe $+\infty$ lub $-\infty$.*

**Wniosek 9.1** *Podzbiór domknięty przestrzeni metrycznej zupełnej jest przestrzenią zupełną.*

## 9.2 Granica funkcji

Niech $(X_i, d_i)$ będą przestrzeniami metrycznymi z topologiami $\tau_i$ dla i=1,2 (bądź wyłącznie przestrzeniami topologicznymi $(X_i, \tau_i)$). Niech $T : X_1 \to X_2$.

**Definicja 9.1** ***(Otoczeniowa Cauchy'ego)*** *Niech $A \subset X_1$ oraz niech $p$ będzie punktem skupienia zbioru $A$. Będziemy mówili, że odwzorowanie $T : A \to X_2$ ma granicę w punkcie $p$ równą $q$ ($q \in X_2$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A} 0 < d_1(p,x) < \delta \Rightarrow d_2(q, T(x)) < \varepsilon \tag{9.1}$$

*Zapisujemy wtedy $\lim\limits_{x\to p} T(x) = q$ lub $T(x) \to q$ dla $x \to p$.*

**Definicja 9.2** ***(Ciągowa Heinego)*** *Niech $A \subset X_1$ oraz niech $p$ będzie punktem skupienia zbioru $A$. Będziemy mówili, że odwzorowanie $T : A \to X_2$ ma granicę w punkcie $p$ równą $q$ ($q \in X_2$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{(p_n)\subset A\setminus\{p\}} \lim_{n\to\infty} p_n = p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(p_n) = q. \tag{9.2}$$

**Uwaga 9.2** *Z określenia punktu skupienia wynika, że punkt $p$ nie musi należeć do zbioru $A$. A jeżeli nawet należy, to nie wynika wcale, że $T(p) = \lim\limits_{x\to p} T(x)$.*

**Uwaga 9.3** *Tak zdefiniowane pojęcie granicy zawiera w sobie definicje granic w nieskończoności dla $(X_2, d_2) = \overline{\mathcal{E}^1}$, jak i granic nieskończonych dla $(X_1, d_1) = \overline{\mathcal{E}^1}$.*

**Twierdzenie 9.3** *Obie definicje granicy odwzorowania w punkcie są równoważne.*

**Wniosek 9.2** *Jeżeli $T$ ma granicę w punkcie $p$, to tylko jedną.*

**Uwaga 9.4** *Funkcję f z X w jednowymiarową przestrzeń euklidesową nazywamy funkcją rzeczywistą.*

**Definicja 9.3** *Niech f,g będą funkcjami rzeczywistymi ze zbioru X, a dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas*

$$h = f + g \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x \in X} h(x) = f(x) + g(x) \tag{9.3}$$

$$h = f \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x \in X} h(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{9.4}$$

$$h = a \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x \in X} h(x) = a \cdot f(x) \tag{9.5}$$

**Uwaga 9.5** *Z wiadomości z algebry liniowej wynika więc, że zbiór funkcji z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez stałą rzeczywsita tworzy przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych.*

**Lemat 9.1** *Niech dany będzie ciąg punktów* $(p_n)$ *przestrzeni metryczne (X,d) zbieżny. Niech ponadto* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} p_n = q$. *Wtedy p=q*

**Twierdzenie 9.4** *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X,d). Niech p będzie punktem skupienia zbioru A, zaś f i g funkcjami rzeczywistymi o dziedzinie A. Niech* $\lim_{x\to p} f(x) = A$ *i* $\lim_{x\to p} g(x) = B$. *Wówczas*

$$\lim_{x\to p}(f+g)(x) = A + B \tag{9.6}$$

$$\lim_{x\to p}(fg)(x) = AB \tag{9.7}$$

$$\lim_{x\to p}(\frac{f}{g})(x) = \frac{A}{B} \tag{9.8}$$

$$\lim_{x\to p}(af)(x) = aA \tag{9.9}$$

**Uwaga 9.6** *Gdy* $\mathcal{E}^1 = (X_1, d_1) = (X_2, d_2)$ *oraz* $p \in \mathbb{R}$, *to otrzymujemy definicję (warunek Cauchy'ego) granicy (skończonej) funkcji w punkcie. Funkcja f ma granicę równą q w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in\mathbb{R}} 0 < |p - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - q| < \varepsilon \tag{9.10}$$

*Gdy* $\overline{\mathcal{E}}^1 = (X_1, d_1)$ *oraz* $\mathcal{E}^1 = (X_2, d_2)$ *oraz* $p = +\infty$, *to otrzymujemy definicję (warunek Cauchy'ego) granicy (skończonej) funkcji w nieskończoności. Funkcja f ma granicę równą q w plus nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}} \delta < x \Rightarrow |f(x) - q| < \varepsilon \tag{9.11}$$

*Analogicznie można otrzymać granice nieskończone w punkcie, jak i granice nieskończone w nieskończoności.*

Dla funkcji rzeczywistych tzn. ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych można zdefiniować granice jednostronne.

**Definicja 9.4** *Niech funkcja f będzie określona na odcinku* $]a, b[$. *Niech x będzie dowolnym punktem takim, że* $a \leqslant x < b$. *Mówimy, że granicą prawostronną funkcji f jest liczba q wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A} 0 < x - p < \delta \Rightarrow |T(x) - q| < \varepsilon \tag{9.12}$$

*Oznaczamy ją* $q = \lim_{t\to x^+} f(t) \equiv f(x^+)$.

Analogicznie można podać definicję jednostronną nieskończoną

**Definicja 9.5** *Niech funkcja f będzie określona na odcinku* $]a, b[$. *Niech x będzie dowolnym punktem takim, że* $a \leqslant x < b$. *Mówimy, że granicą prawostronną funkcji f jest plus nieskończoność wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in A} 0 < x - p < \delta \Rightarrow T(x) > \varepsilon \tag{9.13}$$

*Piszemy wtedy* $\lim_{t\to x^+} f(t) \equiv f(x^+) = +\infty$.

## 9.3 Ciągłość funkcji – podstawowe definicje

**Definicja 9.6** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną. Topologią przestrzeni $(X, d)$ będziemy nazywać rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w tej przestrzeni wyznnaczonych przez metrykę $d$ i oznaczamy ją $\tau_d$ (jeżeli nie będzie to powodowoało nieporozumień to $\tau$).*

**Uwaga 9.7** *Jeżeli $(X_1, d_1)$ będzie przestrzenią metryczną, to je topologię oznaczamy przez $\tau_1$.*

Niech $(X_i, d_i)$ będą przestrzeniami metrycznymi z topologiami $\tau_i$ dla $i = 1, 2$. Niech $T\colon X_1 \to X_2$.

**Definicja 9.7** ***(Otoczeniowa)*** *Mówimy, że odwzorowanie $T$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\mathcal{O}_2 \in \tau_2} T^{-1}(\mathcal{O}_2) \in \tau_1 \tag{9.14}$$

*Niech $p \in X_1$. Mówimy, że odwzorowanie $T$ jest ciągłe w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otoczenia $\mathcal{O}_2$ punktu T(p) zbiór $T^{-1}(\mathcal{O}_2)$ jest otoczeniem punktu p.*

**Uwaga 9.8** *Z definicji tej wynika, że aby odwzorowanie było ciągłe w punkcie musi być określone w tym punkcie.*

**Wniosek 9.3** *Odwzorowanie jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru domkniętego w $(X_2, \tau_2)$ jego przeciwobraz jest domknięty w $(X_1, \tau_1)$*

**Wniosek 9.4** *Następujące warunki są równoważne:*
*(i) $T$ jest ciągłe w punkcie $p$*
*(ii)* $\forall_{\text{otoczenia } \mathcal{O}_{T(p)}} \exists_{\text{otoczenie } \mathcal{O}_p} T(\mathcal{O}_p) \subset \mathcal{O}_{T(p)}$
*(iii)* ***(Warunek Cauchy'ego)***

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X_1} d_1(p, x) < \delta \Rightarrow d_2(T(p), T(x)) < \varepsilon \tag{9.15}$$

*(iv)* ***(Warunek Heinego)***

$$\forall_{(p_n) \subset X_1} \lim_{n \to \infty} p_n = p \Rightarrow \lim_{n \to \infty} T(p_n) = T(p) \tag{9.16}$$

**Uwaga 9.9** *Warunek (9.15) może być zapisany*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X_1} x \in B(p, \delta) \Rightarrow T(x) \in B(T(p), \varepsilon) \tag{9.17}$$

*albo*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in X_1} T(B(p, \delta)) \subseteq B(T(p), \varepsilon). \tag{9.18}$$

**Wniosek 9.5** *Odwzorowanie jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłe w każdym punkcie.*

## 9.4 Zadania

**Zadanie 9.1** *Sformułować wyłacznie przy użyciu wartości bezwzględnej wszystki definicje granic właściwych i niewłaściwych w punkcie i nieskończonościach.*

**Zadanie 9.2** *Sformułować pozostałe definicje granic jednostronnych.*

**Zadanie 9.3** *Niech $X, Y$ będą niepustymi zbiorami oraz $T\colon X \to Y$. Niech ponadto $A, B \subset Y$ oraz $C, D \subset X$. Udowodnić, że*

$$A \subset B \Rightarrow T^{-1}(A) \subset T^{-1}(B) \tag{9.19}$$
$$C \subset D \Rightarrow T(C) \subset T(D) \tag{9.20}$$
$$C \subset T^{-1}(T(C)) \tag{9.21}$$
$$T(T^{-1}(A)) \subset A \tag{9.22}$$
$$A \subset T(X) \Rightarrow T(T^{-1}(A)) = A \tag{9.23}$$

**Zadanie 9.4** *Udowodnić równoważność warunków Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie.*

# Wykład 10

# 2002.12.09 / 3h

## 10.1 Ciągłość funkcji – własności. Jednostajna ciągłość

**Uwaga 10.1** *Jeżeli $A \subset X_1$ oraz $T\colon A \to X_2$, to analogicznie można mówić (oraz można byłoby mówić) o ciągłości takiego odwzorowania na zbiorze $A$. Ale ponieważ dopełnienia zbioru $A$ nie odgrywają roli w definicji będziemy, o ile to nie będzie konieczne, rozważać odwzorowania z $X_1$.*

**Wniosek 10.1** *Jeżeli punkt $p$ jest punktem izolowanym podzbioru $A$ przestrzeni metrycznej (X,d), to odwzorowanie $T\colon A \to X_2$ jest zawsze ciągłe w tym punkcie.*

**Przykład 10.1** *Na podstawie wniosku 10.1 otrzymujemy, że każdy ciąg rzeczywisty jest funkcją ciągłą na $\mathbb{N}$.*

**Uwaga 10.2** *Jeszcze raz należy podkreślić, że ciągłość jest związana z metryką przestrzeni (topologią tej przestrzeni). Dla tego samego zbioru, lecz innych metryk określonych w tym zbiorze, to samo odwzorowanie może być raz ciągłe, a raz nieciągłe.*

**Przykład 10.2** *Rozważmy metrykę dyskretną tzn, dla niepustego zbioru $X$ określamy matrykę następująco*

$$d_d(x,y) = \begin{cases} 1 & dla\ x \neq y \\ 0 & dla\ x = y \end{cases}. \tag{10.1}$$

*Wtedy topologia tej przestrzeni metrycznej składa się dokładnie z dwóch zbiorów $\emptyset$ i $X$. Rozważmy metrykę dyskretną w zbiorze liczb rzeczywistych (przestrzeń $\mathbb{R}_d$) i jednowymiarową przestrzeń euklidesową $\mathcal{E}^1$. Wówczas odwzorowanie identycznościowe z $\mathbb{R}_d$ w $\mathcal{E}^1$ nie jest ciągłe.*

**Wniosek 10.2** *Odwzorowanie identycznościowe z przestrzeni metryczną w nią samą jest ciągłe.*

**Wniosek 10.3** *Odwzorowanie stałe jest ciągłe, bez względu na rodzaj metryk zadanych w dziedzinie i obrazie.*

**Twierdzenie 10.1** *Niech $A$ będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X_1, d_1)$, $T$ odwzorowaniem z $A$ w $(X_2, d_2)$ zaś $p$ punktem ze zbioru $A$ będącym jednocześnie punktem skupienia zbioru $A$. Wtedy $T$ jest ciągłe w $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
*(i) istnieje granica odwzorowania $T$ w punkcie $p$,*
*(ii) granica odwzorowania $T$ w punkcie $p$ jest równa wartości w tym punkcie.*

**Twierdzenie 10.2** *Złożenie odwzorowań ciągłych jest odwzorowaniem ciągłym tzn. Niech $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ będą ciągłe. Wtedy $S \circ T\colon X \to Z$ jest ciągłe.*

**Twierdzenie 10.3** *Niech $f$ i $g$ będą rzeczywistymi funkcjami ciągłymi dziedziną których jest przestrzeń metryczna (X,d). Wówczas ciągłe są funkcje $f + g$, $f \cdot g$, $a \cdot f$ oraz funkcja $\frac{f}{g}$ o ile dla dowolnego punktu $x$ z $X$ zachodzi $g(x) \neq 0$.*

**Definicja 10.1** *Niech $A$ będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej $(X_1, d_1)$, zaś $T\colon A \to X_2$, gdzie $(X_2, d_2)$ jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że odwzorowanie $T$ jest jednostajnie ciągłe na zbiorze $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in A} d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(T(x), T(y)) < \varepsilon \tag{10.2}$$

**Uwaga 10.3** *Jeżeli $(X_1, d_1) = (X_2, d_2) = \mathcal{E}^1$, to warunek 10.2 ma postać*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in A}|x-y|<\delta \Rightarrow |T(x)-T(y)|<\varepsilon \tag{10.3}$$

**Uwaga 10.4** *W definicji 10.1 można rozważać funkcję określoną na całym $X_1$ i mówić, że odwzorowanie jest jednostajnie ciągłe na danym zbiorze.*

**Twierdzenie 10.4** *Jeżeli odwzorowanie $T$ jest jednostajnie ciągłe na zbiorze $A$, to jest ciągłe na tym zbiorze.*

**Przykład 10.3** *Funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła, ale nie jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.*

## 10.2 Funkcje wypukłe i wahanie funkcji w punkcie, a ciągłość

Będziemy rozważać funkcje z przestrzeni metrycznej $\mathcal{E}^1$ w $\mathcal{E}^1$. Niech $P$ będzie niezdegenerowanym[1] przedziałem, $f\colon P \to \mathbb{R}$.

**Definicja 10.2** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną i niech $p \in \mathbb{R}$. Wahaniem funkcji $f$ w punkcie $p$ nazywamy liczbę*

$$W(f,p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta\to 0^+}\left(\sup_{x\in[p-\delta,p+\delta]} f(x) - \inf_{x\in[p-\delta,p+\delta]} f(x)\right). \tag{10.4}$$

**Twierdzenie 10.5** *Niech $f\colon P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy $f$ jest ciągła w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(f,p) = 0$.*

**Definicja 10.3** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.[2]. Mówimy, że podzbiór $A \subseteq V$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in A}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}}\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha x+\beta y\in A \tag{10.5}$$

**Definicja 10.4** *Funkcję $f$ nazywamy wypukłą na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in P}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}}\alpha+\beta=1 \Rightarrow f(\alpha x+\beta y)\leqslant \alpha f(x)+\beta f(y) \tag{10.6}$$

*Funkcję $f$ nazywamy wklęsłą na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-f$ jest wypukła.*

**Wniosek 10.4** *Funkcja $f$ jest wklęsła na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in P}\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}}\alpha+\beta=1 \Rightarrow f(\alpha x+\beta y)\geqslant \alpha f(x)+\beta f(y) \tag{10.7}$$

**Twierdzenie 10.6** *Funkcja wypukła na przedziale jest funkcją ciągłą.*

## 10.3 Ciągłość i zwartość

Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną.

**Definicja 10.5** *Podzbiór $A$ przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy (ciągowo) zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów z tego zbioru można wybrać podciąg zbieżny, którego granica należy do zbioru.*

**Twierdzenie 10.7** ***(Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa.)*** *Odcinek $[a, b]$, gdzie $a \leqslant b$ jest zwarty.*

**Twierdzenie 10.8** *W przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$ następujące warunki są równoważne*

*$A$ zwarty* (10.8)

*$A$ domknięty i ograniczony* (10.9)

*Każdy nieskończony podzbiór $A$ ma punkt skupienia* (10.10)

[1] Znaczy to, że jest niepusty i nieredukuje się do punktu.
[2] Porównaj definicje z *Algebry liniowej*

## 10.4 Zadania

**Zadanie 10.1** *Udowodnić twierdzenie 10.6.*

**Zadanie 10.2** *Dokończyć dowód twierdzenia 10.8.*

**Zadanie 10.3** *Udowodnić, że funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na każdym odcinku skończonym (ograniczonym).*

**Zadanie 10.4** *Niech $f$ będzie jednostajnie ciągłym odwzorowaniem przestrzeni metrycznej $(X, d_X)$ w przestrzeń metryczną $(Y, d_Y)$. Pokazać, że dla dowolnego ciągu Cauchy'ego $(x_n) \subset X$ ciąg $(f(x_n))$ jest ciągiem Cauchy'ego.*

**Zadanie 10.5** *Udowodnić, że złożenie funkcji jednostajnie ciągłych jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

**Zadanie 10.6** *Wykazać, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągłą w $\mathcal{E}^1$, to istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{R}$, że*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leqslant a|x| + b. \tag{10.11}$$

**Zadanie 10.7** *Wykazać, że jeśli $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f : P \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą mającą skończone granice na końcach przedziału $P$, to jest jednostajnie ciągła na $P$.*

**Zadanie 10.8** *Wykazać, że każda funkcja okresowa ciągła jest jednostajnie ciągła.*

**Zadanie 10.9** *Udowodnić, że iloczyn dwóch funkcji jednostajnie ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

*Udowodnić, że warunek ograniczoności obu funkcji jest istotny tzn. iż twierdzenie nie jest prawdziwe bez tego założenia. Rozpatrzyć przykład funkcji $f(x) = x \sin x$.*

**Zadanie 10.10** *Udowodnić, że zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej jest domknięty i ograniczony.*

**Zadanie 10.11** *Udowodnić, że dla dowolnego podzbióru $A \subseteq \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne*
*(i) $A$ jest wypukły*
*(ii) $A$ jest przedziałem*

**Zadanie 10.12** *Niech $P$ bedzie niepustym przedziałem zawierającym co najmniej dwa punkty. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne*

$$f \text{ jest wypukła na } P \tag{10.12}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x_1,\ldots,x_n\in P}\forall_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \Rightarrow f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \tag{10.13}$$

$$\forall_{x_1,x_2,x\in P} x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \tag{10.14}$$

$$\forall_{x_1,x_2,x\in P} x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x - x_1} \tag{10.15}$$

**Uwaga 10.5** *Nierówność 10.13 nazywamy nierównością Jensena.*

# Wykład 11

# 2002.12.16 / 3h

## 11.1 Ciągłość i zwartość – c.d.

Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną, a $\tau$ rodziną jej wszystkich zbiorów otwartych.

**Definicja 11.1** *Pokryciem zbioru $A \subset X$ nazywamy rodzinę zbiorów $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\}$ taką, że*

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} A_i. \tag{11.1}$$

*Jeżeli każdy ze zbioru pokrycia jest zbirem otwartym w tej przestrzeni, to takie pokrycie nazywamy otwartym.*

**Twierdzenie 11.1** ***(Na ocenę bardzo dobrą)*** *Zbiór $E$ nazywamy zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego jego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone tzn.*

$$\forall_{\{A_i : i \in \mathfrak{I}\}} \{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \, \textit{pokrycie zbioru } A \Rightarrow \exists_{i_1, \ldots, i_n \in \mathfrak{I}} E \subset A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}. \tag{11.2}$$

**Przykład 11.1** *Zbiór $\mathbb{R}$ nie jest zwarty w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, gdyż dla pokrycia*

$$\mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{]n, n+1[ : n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ ]n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[ : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

*nie można wybrać podpokrycia skończonego (jednyne podpokrycie zawierające $\mathbb{R}$ jest nim samym).*

**Uwaga 11.1** *Wykorzystywaliśmy w przykładzie 11.1 pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiór liczb całkowitych jest równoliczny (ma taką samą ilość elementów) ze zbiorem liczb naturalnych. Co więcej podobny fakt zachodzi dla liczb wymiernych.*

**Twierdzenie 11.2** *Zbiór w przestrzeni metrycznej jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty.*

**Definicja 11.2** *Funkcja rzeczywista, której dziedziną jest zbiór X, jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{M>0} \forall_{x \in X} |f(x)| \leqslant M \tag{11.3}$$

**Uwaga 11.2** *Inaczej mówimy, że $f(X) \subseteq B(0, M)$ dla pwenego dodatniego $M$. Pozwala, to uogólnić pojęcie odwzorowania ograniczonego określonego na przestrzeniach metrycznych.*

**Definicja 11.3** *Odwzorowanie $T$ z przestrzeni metrycznej $(X_1, d_1)$ w przestrzeń metryczną $(X_2, d_2)$ nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{x_0 \in X_2} \exists_{r>0} T(X_1) \subseteq B(x_0, r) \tag{11.4}$$

**Twierdzenie 11.3** *Niech $T$ będzie odwzorowaniem ciągłym zwartej przestrzeni metrycznej $(X, d_X)$ w przestrzeń metryczną $(Y, d_Y)$. Wówczas T(X) jest zwarty.*

**Wniosek 11.1** *Jeżeli f jest odwzorowaniem ciągłym zwartej przestrzeni metrycznej $(X, d_X)$ w $\mathcal{E}^1$, to zbiór f(X) jest domknięty i ograniczony. A więc odwzorowanie f jest ograniczone.*

**Twierdzenie 11.4** *(**Weierstrassa**) Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na zwartej przestrzeni metrycznej (X,d) i niech*

$$M = \sup_{p \in X} f(p) \wedge m = \inf_{p \in X} f(p). \tag{11.5}$$

*Wówczas istnieją punkty $p, q \in X$ takie, że f(p)=M i f(q)=m.*

**Uwaga 11.3** *Twierdzenie 11.4 można wyrazić następująco: Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.*

**Twierdzenie 11.5** *Niech T będzie odwzorowaniem ciągłym zwartej przestrzeniu metrycznej $(X, d_X)$ w przestrzeń metryczną $(Y, d_Y)$. Wówczas T jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym.*

**Twierdzenie 11.6** *Niech $(X, d_X)$ będzie przestrzenią metryczną zwartą, zaś $(Y, d_Y)$ przestrzenią metryczną oraz $T\colon X \to Y$ ciągłą bijekcją. Wtedy $T^{-1}$ jest ciągłe.*

## 11.2 Ciągłość i spójność

Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną.

**Definicja 11.4** *Zbiory A i B przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy oddzielonymi (rozgraniczonymi) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(A \cap \text{Cl}\,(B)) \cup (\text{Cl}\,(A) \cap B) = \emptyset \tag{11.6}$$

**Przykład 11.2** *W jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej zbiory $[0, 1]$ i $]1, 2[$ nie są oddzielone. Natomiast zbiory $]0, 1[$ i $]1, 2[$ są oddzielone.*

**Definicja 11.5** *Zbiór A przestrzeni metrycznej nazywamy spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest sumą dwóch niepustych i otwartych zbiorów oddzielonych.*

**Przykład 11.3** *W jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej zbiór $]0, 1[ \cup ]1, 2[$ nie jest spójny.*

**Twierdzenie 11.7** *Jeżeli T jest odwzorowaniem ciągłym spójnej przestrzeni metrycznej $(X, d_X)$ w przestrzeń metryczną $(Y, d_Y)$, to zbiór f(X) jest spójny.*

**Uwaga 11.4** *Przyjmujemy konwencję, że przedziałami w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$ są odcinki, półproste i prosta.*

**Uwaga 11.5** *Należy uważać, gdyż zapis $[1, -1]$ też reprezentuje przedział, ale pusty.*

**Twierdzenie 11.8** *Jedynymi zbiorami spójnymi jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej są przedziały.*

**Wniosek 11.2** *Ciągły obraz przedziału jest przedziałem.*

**Definicja 11.6** *Niech A będzie przedziałem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma własność Darboux wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{a,b \in A} \forall_{c \in \mathbb{R}} \exists_{x \in A} a < b \wedge (f(a) < c < f(b) \vee f(a) > c > f(b)) \Rightarrow f(x) = c \tag{11.7}$$

**Twierdzenie 11.9** *(**Darboux**) Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją rzeczywistą. Jeżeli $f(a) < f(b)$ (lub $f(a) > f(b)$) i c jest dowolną liczbą rzeczywistą taką, że $f(a) < c < f(b)$ (odpowiednia $f(a) > c > f(b)$), to istnieje punkt $x \in ]a, b[$ taki, że f(x)=c.*

**Uwaga 11.6** *Twierdzenie 11.9 można sformułować następująco: Ciągła funkcja rzeczywista na przedziale (odcinku) ma własność Darboux.*

## 11.3 Zadania

**Zadanie 11.1** *Udowodnić twierdzenie 11.2.*

**Zadanie 11.2 (Charakteryzacja kresu górnego przez granice)** *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry oraz niech $M = \sup A$. Wtedy istnieje ciąg $(a_n) \subseteq A$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.*

**Zadanie 11.3** *Udowodnić, że podzbiór $A$ przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek*

$$\forall_{x,y\in A}\forall_{z\in\mathbb{R}} x < z < y \Rightarrow z \in A. \tag{11.8}$$

*Warunek ten oznacza, że zbiór spójny musi być przedziałem.*

**Zadanie 11.4** *Niech rzeczywista funkcja spełnia warunek*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{11.9}$$

*Udowodnić, że jeżeli jest ona ciągła w pewnym punkcie, to jest ciągła w każdym punkcie osi liczbowej.*

**Zadanie 11.5** *Udowodnić, że jeżeli rzeczywista funkcja ciągłą i spełnia warunek*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{11.10}$$

*to jest postaci f(x)=ax.*

**Zadanie 11.6** *Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunek*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} f(x+y) = f(x)f(y). \tag{11.11}$$

**Zadanie 11.7** *Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunek*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} f(xy) = f(x) + f(y). \tag{11.12}$$

**Zadanie 11.8** *Dla funkcji rzeczywistych f i g określamy funkcję $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Udowodnić, że jeżeli f i g są ciągłe, to również jest ciągła funkcja h.*

**Zadanie 11.9** *Zbudować funkcję rzeczywistą, która jest nieciągła w każdym punkcie, zaś jej kwadrat jest ciągły w każdym.*

**Zadanie 11.10** *Niech $I = [0, 1]$. Udowodnić, że jeżeli $f : I \to I$ jest ciągła, to istnieje punkt $x \in I$ taki, że f(x)=x*

**Zadanie 11.11** *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Definiujmy na przedziale $[a, b]$ funkcję*

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t\in[a,x]} f(t). \tag{11.13}$$

*Udowodnić że funkcja $F$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$.*

# Wykład 12

# 2003.01.13 / 3h

## 12.1 Ciągłość i spójność

**Twierdzenie 12.1** *Niech $A$ będzie podzbiorem spójnym jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, $f$ ciągłą i różnowartościową funkcją rzeczywistą o dziedzinie $A$. Wówczas $f$ jest ściśle monotoniczna.*

**Uwaga 12.1** *W twierdzeniu 12.1 można zakładać, że podzbiór $A$ jest przedziałem, gdyz na mocy faków z poprzedniego wykładu w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej to są równoważne pojęcia.*

**Uwaga 12.2** *Założenie, że $A$ jest podzbiorem spójnym w twierdzeniu 12.1 jest istotne, gdyż wystarczy rozpatrzeć funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$.*

**Twierdzenie 12.2** *Niech $A$ będzie podzbiorem spójnym jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, $f$ ciągłą i różnowartościową funkcją rzeczywistą o dziedzinie $A$. Wówczas $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbb{R}$ jest ciągłą.*

## 12.2 Nieciągłość. Klasyfikacja punktów nieciągłości funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$

Rozważać będziemy funkcje o dziedzinach i wartościach rzeczywistych.

**Twierdzenie 12.3** *Niech funkcja $f$ będzie określona na odcinku $]a,b[$. Niech $x \in ]a,b[$. Wówczas granica funkcji $f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.*

**Definicja 12.1** *Niech funkcja $f$ będzie określona na odcinku $]a,b[$. Jeżeli funkcja $f$ jest nieciągła w punkcie $x \in ]a,b[$ oraz istnieją skończone granice jednostronne, to mówimy, że w punkcie $x$ funkcja ma nieciągłość pierwszego rodzaju. W przeciwnym wypadku mówimy, że ma nieciągłość drugiego rodzaju.*

**Przykład 12.1** *Funkcja Dirichleta zadana wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & dla\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & dla\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{12.1}$$

*ma w każdym punkcie nieciągłość drugiego rodzaju.*

**Przykład 12.2** *Funkcja $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ ma w zerze nieciągłość pierwszego rodzaju. analogicznie funkcja $g(x) = |f(x)|$.*

**Twierdzenie 12.4** *Jeżeli $f$ jest funkcją monotoniczną na przedziale $]a,b[$. Wówczas dla dowolnego punktu $x \in ]a,b[$ granice jednostronne istnieją.*

*Jeżeli $f$ jest niemalejąca, to*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t) \tag{12.2}$$

*i ponadto jeżeli $a < x < y < b$, to*

$$f(x^+) \leqslant f(y^-). \tag{12.3}$$

*Analogiczne nierówności zachodzą dla funkcji nierosnących.*

**Uwaga 12.3** *Dowód twierdzenia 12.4 dla funkcji nierosnących wynika z faktu, iż funkcja przeciwna do nierosnącej jest niemalejąca.*

**Wniosek 12.1** *Funkcja monotoniczna nie ma nieciągłości drugiego rodzaju.*

**Definicja 12.2** *Powiemy, że zbiór $A$ jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f$ ze zbioru $A$ na zbiór $\mathbb{N}$.*
*Mówimy, że zbiór jest co najwyżej przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przeliczalny lub skończony.*

**Twierdzenie 12.5** *Niech $f$ będzie funkcją monotoniczną na przedziale $]a, b[$, gdzie $a < b$. Wówczas zbiór punktów przedziału $]a, b[$ w których funkcja $f$ jest nieciągła jest co najwyżej przeliczalny.*

**Wniosek 12.2** *Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną, to zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny.*

**Twierdzenie 12.6** *Dla dowolnego zbioru przeliczalnego $\mathfrak{A}$ (co najwyżej przeliczalnego) istnieje funkcja rzeczywista, której punktami nieciągłości są punkty ze zbioru $\mathfrak{A}$.*

## 12.3 Ciągłość elementarnych funkcji rzeczywistych

**Definicja 12.3** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$, zaś $f : A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja $f$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geqslant 0$ (na zbiorze $A$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \tag{12.4}$$

**Uwaga 12.4** *Warunek Lipschitza można rozważać na podzbiorze dziedziny funkcji.*

**Twierdzenie 12.7** *Jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza z pewną stała, to jest jednostajnie ciągła, w więc ciągła.*

**Stwierdzenie 12.1** *Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w swojej dziedzinie naturalnej, czyli $\mathbb{R}$.*

**Lemat 12.1** *Zachodzi następująca nierówność*

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} |\sin x| \leqslant |x| \tag{12.5}$$

**Lemat 12.2** *Funkcja $f(x) = \cos x$ w swej naturalnej dziedzinie spełnia warunek Lipschitza ze stała 1.*

**Lemat 12.3** *Funkcja $f(x) = \sin x$ w swej naturalnej dziedzinie spełnia warunek Lipschitza ze stała 1.*

**Twierdzenie 12.8** *Funkcje sinus i cosinus są ciągłe w swojej naturalnej dziedzinie.*

**Stwierdzenie 12.2** *Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ w swojej naturalnej dziedzinie ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) jest ciągła*

**Stwierdzenie 12.3** *Funkcja potęgowa w swojej naturalnej dziedzinie jest ciągła.*

**Definicja 12.4** *Zdefiniujmy funkcję wykładniczą i logarytmiczną o podstawie $e$ (stała ta pojawiła się jako granica ciągu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).*

$$x \mapsto e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{12.6}$$

*nazywamy funkcją wykładniczą. Jest ona różnowartościowa. Funkcję odwrotną do niej oznaczaną $\ln x$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie $e$.*

**Twierdzenie 12.9** *Funkcja wykładnicza jest funkcją ciągłą.*[1]

**Wniosek 12.3** *Funkcja logarytmiczna jest ciągła.*

**Definicja 12.5** *Funkcję wykładniczą o dowolnej dodatniej podstawie $a$ definiujemy następująco*

$$x \mapsto a^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln a}. \tag{12.7}$$

*Natomiast funkcję logarytmiczną o podstawie dodatniej i różnej od zera określamy następująco*

$$x \mapsto \log_a x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{12.8}$$

**Wniosek 12.4** *Tak określone funkcje są ciągłe.*

[1] Dowód później.

## 12.4 Definicja rózniczkowalności funkcji w punkcie i pochodnej

Niech $A$ będzie podzbiorem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, zaś $x_0$ punktem skupienia zbioru $A$. Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$.

**Definicja 12.6** *Niech $x_0 \in A$. Mówimy, że funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{12.9}$$

*Granicę tą, o ile istnieje, nazywamy pochodną funkcji $f$ w punkcie $x_0$ i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$.*

**Uwaga 12.5** *W praktyce mamy doczynienia ze zbiorem $A$, który jest przedziałem lub suma przedziałów.*

**Uwaga 12.6** *Wyrażenie w równaniu 12.9 musi mieć sens tzn. $f(x_0+h)$ musi być określone czyli $x_0+h \in A$.*

**Uwaga 12.7** *W przypadku, gdy $A = [a, b]$ dla $a < b$ i jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $a$ (odpowiednio w punkcie $b$), to pochodną w punkcie $a$ (odp. w punkcie $b$) nazywamy pochodną prawostronną (odpowiednio pochodną lewostronną) i oznaczamy ją $f'_+(a)$ (odpowiednio $f'_-(b)$).*

*Można też mówić o pochodnych jednostronnych w dowolnym punkcie wewnętrznym zbioru.*

**Uwaga 12.8** *Jeżeli nie będzie inaczej zaznaczone od tego momentu rozważamy funkcje określone na przedziale $[a, b]$ dla $a < b$.*

## 12.5 Zadania

**Zadanie 12.1** *Udowodnić twierdzenie 12.2.*

**Zadanie 12.2** *Uzupełnić dowód twierdzenia 12.6.*

**Zadanie 12.3** *Udowodnić, że jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną i jej zbiór wartości jest przedziałem, to $f$ jest funkcją ciągłą.*

**Zadanie 12.4** *Udowodnić, że funkcja rzeczywista ściśle monotoniczna jest różnowartościowa.*

**Zadanie 12.5** *Udowodnić, że jeżeli $P \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem oraz funkcja $f\colon P \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna, to funkcja odwrotna $f^{-1}\colon f(P) \to P$ jest ciągła.*

**Zadanie 12.6** *Udowodnić, że funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \tag{12.10}$$

*ma w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nieciągłość drugiego rodzaju, zaś w 0 jest ciągła.*

**Zadanie 12.7** *Podać przykład funkcji określonej na $\mathbb{R}$, która nie jest ciągła w żadnym punkcie, a jej kwadrat jest ciągły w każdym.*

**Zadanie 12.8** *Korzystają z określenia funkcji wykładniczej o podstawie e udowodnić, że $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Skorzytać z deinicji iloczynu Cauchy'ego szeregów.*

**Zadanie 12.9** *Korzystając z tożsamości Eulera $e^{it} = \cos t + i \sin t$ i definicji funkcji $e^x$ wyrazić funkcje sinus i cosinus za pomocą szeregów.*

# Wykład 13

# 2003.01.20 / 3h

## 13.1 Różniczkowalność funkcji. Pochodne

Niech $A$ będzie podzbiorem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^1$, zaś $p$ punktem skupienia zbioru $A$ takim, że $p \in A$. Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$.

**Wniosek 13.1** *Funkcja jest pochodną w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodne jednostronne i są one sobie równe.*

**Uwaga 13.1** *Od tej chwili będziemy zakładać, że $A$ jest przedziałem oraz $p \in A$.*

**Twierdzenie 13.1** *Funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$f(p+h) - f(p) = ah + r(p,h) \wedge \lim_{h\to 0} \frac{r(p,h)}{h} = 0, \tag{13.1}$$

*gdzie funkcja $r(p,\cdot)$ jest określona dla na zbiorze $\{h\colon p+h \in A\}$, ciągła w zerze oraz $r(p,0) = 0$.*

**Uwaga 13.2** *Zauważmy, że $a$ występujące w twierdzeniu 13.1 to po prostu pochodna funkcji $f$ w punkcie $p$.*

**Uwaga 13.3** *Prosta o $h \mapsto f(p) + ah$ nazywa się styczną do wykresu funkcji $f$ w punkcie $p$, zaś odwzorowanie $h \mapsto ah$ nazywamy różniczką funkcji $f$ w punkcie $p$.*

**Twierdzenie 13.2** *Funkcja różniczkowana w punkcie $p$ jest ciągłą w $p$.*

**Przykład 13.1** *Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w zerze.*

**Definicja 13.1** *Mówimy, że funkcja jest różniczkowalna na przedziale $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału.*

**Definicja 13.2** *Niech $f$ będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $A$. Odwzorowanie*

$$A \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R} \tag{13.2}$$

*nazywamy pochodną funkcji $f$ i oznaczamy $f'$*

## 13.2 Działania algebraiczne na funkcjach różniczkowalnych

Niech $A, B$ będą niezedegenerowanymi przedziałami jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej.

**Uwaga 13.4** *Zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji określonych i ciągłych na przedziale $A$ oznaczamy przez $C(A) \equiv C^0(A)$, zaś określonych i różniczkowalnych na zbiorze $A$ oznaczamy przez $D^1(A) \equiv D(A)$. Natomiast zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji określonych i różniczkowalnych na zbiorze $A$, których pochodne są funkcjami ciągłymi oznaczamy przez $C^1(A)$.*

*Zauważmy, że zachodzą nastepujące (właściwe) zawierania*

$$C^1(A) \subset D^1(A) \subset C(A).$$

**Przykład 13.2** *Niech $A = \mathbb{R}$. Funkcja $f(x) = |x|$. Wówczas $f \in C(A)$ oraz $f \notin D^1(A)$.*

**Twierdzenie 13.3** *Niech $p \in A$ oraz $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi w $p$. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas:*

*(i) $\alpha f + \beta g$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $(\alpha f + \beta g)'(p) = \alpha f'(p) + \beta g'(p)$;*

*(ii) $f \cdot g$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$;*

*(iii) jeżeli $g(p) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $(\frac{f}{g})'(p) = \frac{f'(p)\cdot g(p) - f(p)\cdot g'(p)}{g^2(p)}$*

**Twierdzenie 13.4** *Niech $p \in A$ oraz $f(p) \in B$. Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $g$ jest różniczkowalna w $f(p)$, to $g \circ f$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $(g \circ f)'(p) = (g' \circ f)(p) \cdot f'(p)$.*

**Twierdzenie 13.5** *Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różnowartościową i różniczkowalną w punkcie $p$ oraz $f'(p) \neq 0$. Wówczas w punkcie $q = f(p)$ funkcja $f^{-1}$ jest różniczkowalna oraz*

$$\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)} \tag{13.3}$$

**Funkcje elementarne i ich pochodne.**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Założenia |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $x \in \mathbb{R}_+$ |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x \in \mathbb{R}_+$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $x \in \mathbb{R}_+ \wedge a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Założenia |
|---|---|---|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $D_f = [-1,1] \wedge D_{f'} = ]-1,1[$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $D_f = [-1,1] \wedge D_{f'} = ]-1,1[$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | |

**Uwaga 13.5** *Przez $D_f$ oznaczamy dziedzine funkcji $f$.*

## 13.3 Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego

Rozważać będziemy funkcje rzeczywiste argumentu rzeczywistego (rozważamy jednowymiarową przestrzeń euklidesową).

**Twierdzenie 13.6** ***(Rolle'a)*** *Niech $a < b$ oraz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$ oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in ]a,b[$ taki, że $f'(c) = 0$.*

**Twierdzenie 13.7** ***(Cauchy'ego o wartości średniej)*** *Niech $a < b$ oraz $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f, g \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$, to istnieje punkt $c \in ]a,b[$ taki, że*

$$g'(c)((f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)) \tag{13.4}$$

**Wniosek 13.2** *Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 13.7 i ponadto pochodna funkcji $g$ nie zeruje się w przedziale $]a,b[$, to*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{13.5}$$

**Twierdzenie 13.8** ***(Lagrange'a o wartości średniej)*** *Niech $a < b$ oraz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Jeżeli $f \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$, to istnieje punkt $c \in ]a,b[$ taki, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{13.6}$$

## 13.4 Zadania

**Zadanie 13.1** *Pokazać, że zawieranie* $C^1(A) \subset D^1(A)$ *jest właściwe.*

**Zadanie 13.2** *Udowodnić wszystkie wzory występujące w tabeli:* ***Funkcje elementarne i ich pochodne****.*

**Zadanie 13.3** *Niech* $P$ *będzie niezdegenerowanym przedziałem. Udowodnić, że jeśli* $f \in D(P)$*, to* $f'$ *ma własność Darboux.*

**Zadanie 13.4** *Udowodnić, że jeśli funkcja* $f$ *jest różniczkowalna w punkcie* $p$*, to*

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p-h)}{2h} \tag{13.7}$$

**Zadanie 13.5** *Podać przykład funkcji dla której istnieje granica* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(p+h)-f(p-h)}{2h}$*, ale funkcja nie jest w punkcie* $p$ *różniczkowalna.*

*Powyższą granicę nazywamy pochodną uogólnioną funkcji* $f$ *w punkcie* $p$*.*

**Zadanie 13.6** *Podać przykład funkcji nieciągłej w punkcie posiadającą pochodną uogólnioną w tym punkcie.*

# Wykład 14

# Egzamin

## 14.1 Zagadnienia na egzamin – część teoretyczna

1. Relacje. Ciała liczbowe i uporządkowane. Kresy.
   (a) Relacje i ich typy.
   (b) Ciało liczbowe i jego własności.
   (c) Ciało uporządkowane i jego własności.
   (d) Kresy w ciele uporządkowanym i ich własności.
2. Liczby rzeczywiste
   (a) Zasada ciągłości Dedekinda (5.0).
   (b) Kresy w liczbach rzeczywistych i ich własności.
   (c) Zasada Archimedesa.
   (d) Gęstość liczb wymiernych.
   (e) Twierdzenie o pierwiastku.
   (f) Wartość bezwzględna i jej własności.
   (g) Średnie arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna i związek między nimi.
   (h) Indukcja matematyczna zupełna.
   (i) Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.
3. Ciągi liczbowe.
   (a) Ciągi zbieżne i granica ciągu zbieżnego. Twierdzenie o jednoznaczności granicy.
   (b) Ciągi ograniczone i ich związek z ciągami zbieżnymi.
   (c) Działania na granicach ciągów zbieżnych.
   (d) Twierdzenie o trzech ciągach i wnioski z niego.
   (e) Ciągi monotoniczne.
   (f) Podciągi. Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa.
   (g) Związek między ciągami monotonicznymi ograniczonymi, a zbieżnymi.
   (h) Ciągi Cauchy'ego, a ciągi zbieżne.
   (i) Ciągi rozbieżne do nieskończoności. Ciągi zbieżne w szerszym sensie.
   (j) Ciągi monotoniczne i rozbieżne do nieskończoności.
   (k) Pojęcie granicy górnej i dolnej ciągu liczbowego.

(l) Własności granicy górnej i dolnej ciągu liczbowego. Związek ich z granicą.

4. Szeregi liczbowe.
   (a) Szereg liczbowy. Zbieżność szeregów liczbowych.
   (b) Warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregów.
   (c) Działania na szeregach zbieżnych.
   (d) Szeregi nieujemne. Kryterium Weierstrassa zbieżności i rozbieżności.
   (e) Kryterium zagęszczania Cauchy'ego.
   (f) Kryterium Cauchy'ego (z granicą górną).
   (g) Kryterium d'Alemberta.
   (h) Kryterium Kummera i Raabego.
   (i) Lemat Abela. Kryterium Abela - Dirichleta.
   (j) Szeregi naprzemienne. Kryterium Leibniza.
   (k) Szeregi bezwzględnie i warunkowo zbieżne. Szeregi bezwzględnie zbieżne, a zbieżne.
   (l) Szeregi warunkowo zbieżne. Twierdzenie Riemanna.
   (m) Iloczyn Cauchy'ego szeregów. Twierdzenie Cauchy'ego.
   (n) Szeregi potęgowe. Twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda.
5. Funkcje
   (a) Pojęcie funkcji. Obraz i przeciwobraz i ich własności.
   (b) Typy funkcji.
6. Elementy topologii
   (a) Przestrzeń metryczna. Jednowymiarowa przestrzeń euklidesowa.
   (b) Zbiory otwarte w przestrzeni metrycznej i ich własności.
   (c) Przestrzeń topologiczna. Przestrzeń metryczna jako przestrzeń topologiczna.
   (d) Zbiory domknięte w przestrzeni metryczne i ich własności.
   (e) Domknięcie zbioru, a punkty skupienia zbioru.
   (f) Przestrzeń metryczna zupełna. Zupełność jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej.
   (g) Zupełność rozszerzonej jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej (5.0).
   (h) Zbiory zwarte w przestrzeni metrycznej.
   (i) Równoważność określenia zwartości zbioru w przestrzeni metrycznej (5.0).
   (j) Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa o zwartości odcinka domkniętego w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej.
   (k) Warunki równoważne zwartości w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej.
   (l) Zbiory i przestrzenie spójne.
   (m) Zbiory spójne w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej.
7. Funkcje w przestrzeniach metrycznych (funkcje rzeczywiste).
   (a) Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji w punkcie i ich równoważność.
   (b) Jednoznaczność granicy funkcji w punkcie i działania na granicach.
   (c) Funkcje ciągłe w przestrzeni metrycznej. Funkcje ciągłe w punkcie – warunki równoważne.
   (d) Równoważność definicji ciągłości w punkcie Cauchy'ego i Heinego.
   (e) Ciągłość w punkcie, a granica w punkcie.

(f) Działania na funkcjach ciągłych.

(g) Jednostajna ciągłość, a ciągłość.

(h) Twierdzenie o ciągłym obrazie przestrzeni metrycznej zwartej i wnioski z niego.

(i) Twierdzenie Weierstrassa o ciągłej funkcji rzeczywistej na zwartej przestrzeni metrycznej.

(j) Jednostajna ciągłość, a ciągłość odwzorowania na zwartej przestrzeni metrycznej.

(k) Twierdzenie o ciągłości bijekcji ciągłej określonej na zbiorze zwartym.

(l) Twierdzenie o ciągłym przekształceniu przestrzeni (zbioru) spójnego.

(m) Twierdzenie Darboux (własność Darboux).

(n) Twierdzenie o funkcji odwrotnej określonej na zbiorze spójnym.

(o) Granice jednostronne. Nieciągłość. Klasyfikacji punktów nieciągłości.

(p) Punkty nieciągłości funkcji monotonicznej.

(q) Twierdzenie o istnieniu funkcji nieciągłej w zadanym zbiorze przeliczalnym (5.0).

(r) Warunek Lipschitza, a jednostajna ciągłość.

8. Różniczkowalność i pochodne funkcji.

   (a) Pojęcie różniczkowalności funkcji – warunki równoważne. Pochodna funkcji w punkcie.

   (b) Ciągłość, a różniczkowalność.

   (c) Działania algebraiczne na funkcjach różniczkowalnych.

   (d) Pochodne funkcji elementarnych.

   (e) Twierdzenie Rolle'a.

   (f) Twierdzenia o wartości średniej.

## 14.2 Zadania z egzaminu

1. (**4pkt+4pkt+4pkt/40pkt**) Policzyć granice
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{(-1)^n}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

2. (**4pkt+4pkt/40pkt**) Zbadać zbieżność szeregów a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+3^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+(-1)^n)^n}{4^n}$.

3. (**4pkt/40pkt**) Udowodnić, że jeżeli zbieżne są szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, to również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ jest zbieżny.

4. (**4pkt/40pkt**) Wyznaczyć wzór funkcji $f(x)$ jeżeli $f(x+1)=x^2-3x+2$.

5. (**4pkt/40pkt**) Niech funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ciągła oraz niech $c\in\mathbb{R}_+$. Udowodnić, że funkcja $\mathbb{R}\ni x\mapsto f_c(x)=\begin{cases} c & \text{dla } f(x)>c \\ f(x) & \text{dla } |f(x)|\leqslant c \\ -c & \text{dla } f(x)<-c \end{cases}$ jest ciągła.

6. (**4pkt/40pkt**) Zbadać ciągłość funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i sklasyfikować punkty nieciągłości jeżeli określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x<0 \\ 2\sqrt{x} & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 4-2x & \text{dla } 1<x<2,5 \\ 2x-7 & \text{dla } x\geqslant 2,5 \end{cases}$.

7. (**4pkt/40pkt**) Udowodnić jednostajną ciągłość funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x)=x^3$ na przedziale $[0,3]$.

## 14.3 Zadania z egzaminu poprawkowego

1. (**4pkt+4pkt+4pkt/40pkt**) Policzyć granice a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$

2. (**4pkt+4pkt/40pkt**) Zbadać zbieżność szeregów a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

3. (**4pkt/40pkt**) Niech $|x|\geqslant 2$. Wyznaczyć wzór funkcji $f(x)$ jeżeli $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$.

4. (**4pkt/40pkt**) Zbadać ciągłość funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-x}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$. Jeżeli funkcja jest nieciągła w jakimś punkcie, to sklasyfikować punkt nieciągłości.

5. (**4pkt/40pkt**) Czy można dobrać parametr $a$, tak aby funkcja zadana wzorem $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ a & \text{dla } x=0 \end{cases}$ była ciągła w punkcie 0 ?

6. (**4pkt/40pkt**) Udowodnić jednostajną ciągłość funkcji zadaną wzorem $f(x)=\sqrt{x}$ na przedziale $[1,+\infty[$.

7. (**4pkt/40pkt**) Niech $f_n(x)=(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n})(x)$. Wyznaczyć $f_n(x)$ jeżeli $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

## 14.4 Zadania z egzaminu komisyjnego

1. (**5pkt/40pkt**) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

2. (**5pkt+5pkt/40pkt**) Policzyć granice a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + 3^n + \pi^n + \sin n}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

3. (**5pkt+5pkt/40pkt**) Zbadać zbieżność szeregów a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$.

4. (**5pkt/40pkt**) Wyznaczyć wzór funkcji $f(x)$ jeżeli $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$.

5. (**5pkt/40pkt**) Czy można dobrać parametry $a$ i $b$ tak, aby funkcja zadana wzorem $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ ax+b & \text{lda } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

   była ciągła w swojej dziedzinie?

6. (**5pkt/40pkt**) Udowodnić z definicji jednostajną ciągłość funkcji zadaną wzorem $f(x) = x^2$ na przedziale $]0, 2[$.

# Wykład 1

# 2003.02.17 / 3h

## 1.1 Uwaga do twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej

**Uwaga 1.1** *Przyjmijmy, że $b = a + h$ dla $h > 0$ wtedy tezę twierdzenia Lagrange'a (twierdzenie 13.8) można sformułować następująco*

$$\exists_{\Theta\in]0,1[} f(a+h) - f(a) = hf'(a+\Theta h) \tag{1.1}$$

## 1.2 Monotoniczność, a pochodna

Niech $P$ będzie niezdegenerowanym przedziałem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Niech $f\colon P \to \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 1.1** *Niech $f \in D(P)$.*

*(i) Jeżeli $f'(x) = 0$ dla $x \in P$, to f jest stała na $P$.*

*(ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in P$, to f jest rosnąca na $P$.*

*(iii) Jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in P$, to f jest niemalejąca na $P$.*

*(iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in P$, to f jest malejąca na $P$.*

*(v) Jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in P$, to f jest nierosnąca na $P$.*

**Uwaga 1.2** *Istotnym założeniem jest spójność przedziału $P$*

**Przykład 1.1** *Funkcja $f\colon ]0,1[\cup]2,3[\to \mathbb{R}$ określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in ]0,1[ \\ 5 & \text{dla } x \in ]2,3[ \end{cases} \tag{1.2}$$

*ma pochodną równą zeru w swojej dziedzinie, ale nie jest stała.*

**Przykład 1.2** *Funkcja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ ma pochodną cały czas ujemną, ale nie jest malejąca.*

**Twierdzenie 1.2** *Niech $f \in D^1(P)$.*

*(i) Jeżeli f jest stała na $P$, to $f'(x) = 0$ dla $x \in P$.*

*(ii) Jeżeli f jest niemalejąca na $P$, to $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in P$.*

*(ii) Jeżeli f jest nierosnąca na $P$, to $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in P$.*

**Uwaga 1.3** *Twierdzenia 1.1 nie daje się odwrócić w w drugim i trzecim przypadku.*

**Przykład 1.3** *Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x^3$ jest rosnąca, ale $f'(0) = 0$.*

*Podobnie dla malejącej funkcji $f(x) = -x^3$ mamy $f'(0) = 0$.*

## 1.3 Jednostajna ciągłość, a pochodna

Niech $P$ będzie niezdegenerowanym przedziałem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Niech $f\colon P \to \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 1.3** *Niech $f \in D^1(P)$. Wtedy jeżeli $f'$ jest ograniczona przez stałą $M > 0$, to $f$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $M$.*

**Wniosek 1.1** *Niech $f \in D^1(P)$. Wtedy jeżeli $f'$ jest ograniczona przez stałą $M > 0$, to funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła na $P$.*

## 1.4 Ekstrema. Ekstrama, a pochodna

Niech $A \subset \mathbb{R}$ oraz $f\colon A \to \mathbb{R}$. Niech $p \in A$.

**Definicja 1.1** *Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_p$ punktu $p$ takie, że $\mathcal{O}_p \subset A$ oraz dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}_p$ jest $f(x) \leqslant f(p)$.*

*Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_p$ punktu $p$ takie, że $\mathcal{O}_p \subset A$ oraz dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}_p$ jest $f(x) \geqslant f(p)$.*

*Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ maksimum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_p$ punktu $p$ takie, że $\mathcal{O}_p \subset A$ oraz dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}_p \setminus \{p\}$ jest $f(x) < f(p)$.*

*Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ minimum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_p$ punktu $p$ takie, że $\mathcal{O}_p \subset A$ oraz dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}_p \setminus \{p\}$ jest $f(x) > f(p)$.*

*Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ ekstremum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy ma w punkcie $p$ miminum lokalne bądź maksimum lokalne.*

*Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $p$ ekstremum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ma w punkcie $p$ miminum lokalne właściwe bądź maksimum lokalne właściwe.*

**Uwaga 1.4** *Minimum (maksimum) lokalne nazywane też jest minimum (maksimum) lokalnym niewłaściwym.*

**Uwaga 1.5** *Otoczenie punktu $p$ $\mathcal{O}_p$ bez punktu $p$ nazywamy sąsiedztwem punktu $p$ i oznaczamy przez $\mathcal{S}_p$.*

*Przez $\mathcal{S}_p^+$ ($\mathcal{S}_p^-$) będziemy oznaczać sąsiedztwo prawostronne (lewostronne) punktu $p$.*

*Przez otoczenie punktu $p$ dla uproszczenia najczęściej będziemy rozumieć $K(p, r)$ dla pewnego $r > 0$.*

**Przykład 1.4** *Funkcja $f(x) = x^2$ ma w $x = 0$ minimum lokalne właściwe, zaś funkcja $f(x) = -x^2$ ma w $x = 0$ maksimum lokalne właściwe.*

**Przykład 1.5** *Funkcja $f(x) = 1$ ma w każdym punkcie minimum oraz maksimum lokalne.*

**Twierdzenie 1.4 (Fermata – Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)** *Jeżeli funkcja $f$ jest określona w otaczeniu punktu $p$ i różniczkowalana w punkcie $p$ oraz ma w punkcie $p$ ekstremum lokalne, to $f'(p) = 0$.*

**Twierdzenie 1.5 (Warunek dostateczny istniania ekstremum lokalnego – I)** *Jeżeli funkcja $f$ jest określona w otaczeniu $\mathcal{O}_p$ punktu $p$ oraz jest różżniczkowalna w $\mathcal{O}_p \setminus \{p\}$ i jest ciągła w $p$, to jeśli*

*(i) $f'(x) > 0$ dla $x \in ]p - \varepsilon, p[$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in ]p, p + \varepsilon[$, to funkcja $f$ ma w $p$ maksimum lokalne.*

*(ii) $f'(x) < 0$ dla $x \in ]p - \varepsilon, p[$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in ]p, p + \varepsilon[$, to funkcja $f$ ma w $p$ minimum lokalne.*

**Przykład 1.6** *Niech $f(x) = x + 3x^{\frac{2}{3}}$. Wówczas $f'(x) = 1 + x^{-\frac{1}{3}}$ oraz $D_f = \mathbb{R}$ i $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcja ma w $x = -1$ maksimum właściwe oraz w $x = 0$ minimum właściwe.*

**Twierdzenie 1.6** *Niech $f$ będzie określona na $K(p, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$), klasy $C^1(K(p, \varepsilon))$ oraz $f'(p) \neq 0$. Wtedy istnieje $K(p, \delta) \subseteq K(p, \varepsilon)$ ($\delta > 0$) taka, że $f|_{K(p,\delta)}$ jest odwracalna i $f^{-1} \in C^1(f(K(p, \delta)))$*

**Uwaga 1.6** *Przez $f|_A$, gdzie $A \subset D_f$ oznaczamy funkcję $f$ ograniczoną (obciętą) do zbioru $A$.*

## 1.5 Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora

Niech $P$ będzie niezdegenerowanym przedziałem jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Niech $f\colon P \to \mathbb{R}$. Niech ponadto $A$ będzie niepustym zbiorem (przedziałem, sumą przedziałów bądź zbiorem otwartym).

**Definicja 1.2** ***(Definicja rekurencyjna)*** *Niech $p \in P$. Mówimy, że funkcja $f$ jest $n$ - krotnie różniczkowalna w punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest $n-1$ - krotnie różniczkowalna w punkcie $p$ oraz $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna w punkcie $p$.*

*Niech $A$ będzie niepustym zbiorem (przedziałem, sumą przedziałów bądź zbiorem otwartym).*

*Mówimy, że funkcja $f$ określona na zbiorze $A$ jest $n$ - krotnie różniczkowalna na zbiorze $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie tego zbioru jest $n$ - krotnie różniczkowalna. Oznaczamy zbiór funkcji $n$ - krotnie różniczkowalnych przez $D^n(A)$.*

*Mówimy, że funkcja $f$ określona na zbiorze $A$ jest $n$ - krotnie różniczkowalna w sposób ciągły na zbiorze $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $n$ - krotnie różniczkowalna na zbiorze $A$ oraz jej $n$ - ta pochodna jest funkcją ciągłą. Oznaczamy zbiór funkcji $n$ - krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły przez $C^n(A)$.*

**Uwaga 1.7** *Zachodzą następujące inkluzje $C^{n+1}(A) \subset D^{n+1}(A) \subset D^n(A) \subset C^{n-1}(A)$ oraz $C^{n+1}(A) \subset C^n(A)$. Przy czym są to zawierania właściwe.*

**Definicja 1.3**

$$D^{\infty}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n(A) \tag{1.3}$$

$$C^{\infty}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(A) \tag{1.4}$$

**Wniosek 1.2** $D^{\infty}(A) = C^{\infty}(A)$

**Twierdzenie 1.7 (Wzór Leibniza)** *Niech funkcje $f$ i $g$ będą $n$ - krotnie różniczkowalne w punkcie $p$. Wówczas*

$$(f \cdot g)^{(n)}(p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(p) \cdot g^{(n-k)}(p). \tag{1.5}$$

*Przyjmujemy, że $f^{(0)}(p) \stackrel{\text{ozn}}{=} f(p)$.*

**Twierdzenie 1.8 (Taylora)** *Niech $A \subset \mathbb{R}$, $x \in A$ oraz $f \in D^{n+1}(A)$. Załóżmy, że dla pewnego dodatniego $h$ odcinek $[x, x+h] \subset A$. Wóczas istnieje liczba $\Theta \in ]0,1[$ taka, że*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{1!}f^{(2)}(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\Theta h)h^{n+1} \tag{1.6}$$

**Uwaga 1.8** *Dla $n = 0$ otrzymujemy twierdznie Lagrange'a (twierdzenie 13.8).*

## 1.6 Zadania

**Zadanie 1.1** *Udowodnić, że funkcja z przykładu 1.3 jest rosnąca.*

**Zadanie 1.2** *Udowodnić, że funkcja z przykładu 1.6 ma w punkcie $x = -1$ maksimum lokalne właściwe.*

**Zadanie 1.3** *Udowodnić twierdzenie 1.7.*

**Zadanie 1.4** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną nastepująco*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\} & dla\ x \neq 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}. \tag{1.7}$$

*Udowodnić, że wówczas $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ oraz w zerze istnieje pochodna dowolnego rzędu i jest równa ona zeru.*

# Wykład 2

# 2003.02.24 / 3h

## 2.1 Zastosowania wzoru Taylora – wzór Macluarina, ekstrema – raz jeszcze, reguła de l'Hospitala

**Wniosek 2.1 (Maclaurina)** *Niech* $A \subset \mathbb{R}$*,* $0 \in A$ *oraz* $f \in D^{n+1}(A)$*. Załóżmy, że dla pewnego dodatniego* $x$ *odcinek* $[0, x] \subset A$*. Wóczas istnieje liczba* $\Theta \in ]0, 1[$ *taka, że*

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{1!}f^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\Theta x)x^{n+1} \tag{2.1}$$

**Twierdzenie 2.1 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego – II)** *Niech* $A \subset \mathbb{R}$*,* $p \in A$ *oraz* $f\colon A \to \mathbb{R}$*. Niech ponadto istnieje* $\mathbb{R} \ni h > 0$ *takie, że* $f \in C^n(]p-h, p+h[)$ *oraz* $f'(p) = f^{(2)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0$ *i* $f^{(n)}(p) \neq 0$*. Wówczas*

*(i) jeśli* $n$ *jest liczbą nieparzystą, to funkcja nie posiada w punkcie* $p$ *ekstremum lokalnego;*

*(ii) jeśli* $n$ *jest liczba przystą, to w funkcja* $f$ *w punkcie* $p$ *ma ekstremum lokalne. Ponadto jeśli* $f^{(n)}(p) > 0$ *to w* $p$ *ma minimum lokalne, a gdy* $f^{(n)}(p) < 0$ *to maksimum lokalne.*

**Twierdzenie 2.2 (Reguła de l'Hospitala – I)** *Niech* $h > 0$ *oraz* $f, g \in C^n(]p-h, p+h[)$*. Załóżmy, że istnieją* $k, l \in \mathbb{N}$*,* $k \leqslant n$ *i* $l \leqslant n$ *takie, że*

*(i)* $f(p) = f'(p) = \ldots = f^{(k-1)}(p) = 0$ *i* $f^{(k)}(p) \neq 0$

*(ii)* $g(p) = g'(p) = \ldots = g^{(l-1)}(p) = 0$ *i* $g^{(l)}(p) \neq 0$*.*

*Wówczas*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > l \\ \frac{f^{(k)}(p)}{g^{(k)}(p)} & \text{dla } k = l \\ \infty & \text{dla } k < l \text{ oraz } l - k \in 2\mathbb{N} \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } k < l \text{ oraz } l - k \notin 2\mathbb{N} \end{cases}. \tag{2.2}$$

**Twierdzenie 2.3 (Reguła de l'Hospitala – II)** *Niech* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *oraz* $f, g \in D(]a, b[)$*. Niech ponadto istnieje granica prawostronna ilorazu* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *w punkcie* $a$*. Wtedy, jeżeli spełniony jest jeden z warunków*

*(i)* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a^+} g(x)$

*(ii)* $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$*,*

*to istnieje granica prawostronna ilorazu* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *w punkcie* $a$ *i jest równa granicy prawostronnej ilorazu* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *w punkcie* $a$*.*

**Uwaga 2.1** *Można rozważać granice lewostronne w punkcie* $b$*, jak również granice obustronna (czyli granicę) w punkcie* $p \in ]a, b[$*.*

**Uwaga 2.2** *Z reguły de l'Hospitala korzystamy licząc granice następujących wyrażeń (symboli) nieoznaczonych* $\frac{0}{0}$*,* $\frac{\infty}{\infty}$*,* $0 \cdot \infty$*,* $\infty - \infty$*,*[1] $0^0$*,* $\infty^0$*,* $1^\infty$*.*

[1] Obie nieskończoności muszą mieć ten sam znak.

## 2.2 Wklęsłość i wypukłość, a pochodna. Punkty przegięcia.

**Twierdzenie 2.4** *Niech $f \in D(P)$. Wtedy $f$ jest wypukła na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'$ jest niemalejąca na przedziale $P$*

**Wniosek 2.2** *Niech $f \in D^2(P)$. Wtedy $f$ jest wypukła na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(2)}(x) \geqslant 0$ dla dowolnego punktu $x$ z przedziału $P$.*

**Definicja 2.1** *Niech punkt $p$ będzie punktem wewnętrznym przedziału $P$.*[2] *Mówimy, że funkcja $f$ ma w $p$ punkt przegięcia wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że*
*(i) $K(p, \delta) \subseteq P$*
*(ii) funkcjami wypukłymi są funkcje $f$ na $S^-(p,\delta)$ i $-f$ na $S^+(p,\delta)$, bądź funkcje $f$ na $S^+(p,\delta)$ i $-f$ na $S^-(p,\delta)$.*

**Twierdzenie 2.5 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)** *Niech punkt $p \in P$ będzie punktem wewnętrznym oraz $f \in D^2(P)$ i $p$ jest punktem przegięcia funkcji $f$. Wtedy $f^{(2)}(p) = 0$.*

**Twierdzenie 2.6 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia – I)** *Niech punkt $p$ będzie punktem wewnętrznym przedziału $P$ oraz $f \in D^2(P)$. Jeżeli istnieje $\delta > 0$ tak, że spełniony jest jeden warunków*
*(i) $f^{(2)}(x) > 0$ dla $x \in S^-(p,\delta)$ i $f^{(2)}(x) < 0$ dla $x \in S^+(p,\delta)$*
*(ii) $f^{(2)}(x) < 0$ dla $x \in S^-(p,\delta)$ i $f^{(2)}(x) > 0$ dla $x \in S^+(p,\delta)$,*
*to funkcja $f$ ma w $p$ punkt przegięcia.*

**Twierdzenie 2.7 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia – II)** *Niech $A \subset \mathbb{R}$, $p \in A$ oraz $f \colon A \to \mathbb{R}$. Niech ponadto istnieje $\mathbb{R} \ni h > 0$ takie, że $f \in C^n(]p-h, p+h[)$, gdzie $n \geqslant 3$ oraz $f'(p) = f^{(2)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0$ i $f^{(n)}(p) \neq 0$. Wówczas jeśli $n$ jest liczbą nieparzystą, to funkcja posiada w punkcie $p$ punkt przegięcia.*

## 2.3 Zadania

**Zadanie 2.1** *Niech $f \in D(P)$. Udowodnić, że $f$ jest wypukła na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x_0, x \in P} f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{2.3}$$

**Zadanie 2.2** [3] *Niech $P$ będzie niezdegenerowanym przedziałem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne*

$$f \text{ jest wypukła na } P \tag{2.4}$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x_1,\ldots,x_n \in P} \forall_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \Rightarrow f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \tag{2.5}$$

$$\forall_{x_1,x_2,x \in P} x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \tag{2.6}$$

$$\forall_{x_1,x_2,x \in P} x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x - x_1} \tag{2.7}$$

**Zadanie 2.3** *Przeanalizować dowód **reguły de l'Hospitala II** (twierdzenie 2.3) z podręczników W. Rudina Podstawy analizy matematycznej i A. Birkholza Analiza matematyczna dla nauczycieli*

[2] Zobacz definicja 8.8(iii)
[3] Zadanie powtórzone z wykładu z dnia 9 grudnia 2002.

# Wykład 3

# 2003.03.03 / 3h

## 3.1 Całka niezonaczona

Niech $P$ będzie przedziałem niezdegenerowanym tzn. nie redukującym się do punktu. Niech $F, G, f\colon P \to \mathbb{R}$ oraz $F, G \in D(P)$ i $f \in C(P)$.

**Definicja 3.1** *Funkcję $F$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f$ na przedziale $P$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in P$ zachodzi równość $F'(x) = f(x)$.*

**Twierdzenie 3.1** *Niech $F$ i $G$ będą funkcjami pierwotnymi funkcji $f$ na przedziale $P$. Wtedy istnieje $C \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $x \in P$ zachodzi równość $F(x) - G(x) = C$.*

**Definicja 3.2** *Całką nieoznaczoną funkcji $f$ na przedziale $P$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych na przedziale $P$ funkcji $f$. Miszemy wówczas*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ gdzie } C \in \mathbb{R} \wedge \forall_{x \in P} F'(x) = f(x) \tag{3.1}$$

**Funkcje elementarne i ich funkcje pierwotne. (<u>Udowodnić</u>)**

| $\int f(x)dx$ | Założenia |
|---|---|
| $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\alpha x^{\alpha+1} + C$ | $\alpha \neq -1 \wedge x \in \mathbb{R}_+$ |
| $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ | $x \in \mathbb{R}_+$ |
| $\int e^x dx = e^x + C$ | |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$ | |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$ | $x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$ | $D_f = ]-1, 1[$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + C$ | $D_f = ]-1, 1[$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$ | |
| $\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\operatorname{arcctg} x + C$ | |

**Twierdzenie 3.2** *Niech $f, g \in C(P)$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \tag{3.2}$$

**Twierdzenie 3.3 (Całkowanie przez części)** *Niech $f, g \in C^1(P)$. Wówczas*

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx \tag{3.3}$$

**Twierdzenie 3.4 (Całkowanie przez podstawianie)** *Niech $A$ będzie niezdegenerowanym przedziałem $\phi\colon A \to P$ taką, że $\phi \in C^1(A)$ i dla dowolnego $t \in A$ zachodzi $\phi'(t) \neq 0$. Niech ponadto $f \in C(P)$. Wówczas*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt \tag{3.4}$$

*(równość zachodzi na przedziale $A$).*

**Przykład 3.1** *Mamy $\int xe^x dx = \int (e^x)'xdx = e^x x - \int e^x(x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$.*

**Przykład 3.2** *Mamy $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int (e^{x^2})'dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$.*

## 3.2 Całkowanie funkcji wymiernych

Na początku tego paragrafu przypominimy twierdzenia o wielomianach z algebry liniowej.

**Twierdzenie 3.5** *Niech $W_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ wtedy wielomian $W(x)$ można jednoznaczenie przedstawić w postaci*

$$W_n(x) = (x - A_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - A_m)^{k_m} \cdot \left[(x - B_1)^2 + C_1^2\right]^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left[(x - B_r)^2 + C_r^2\right]^{l_r}, \tag{3.5}$$

*gdzie $k_1 + \ldots + k_m + 2 \cdot (l_1 + \ldots + l_r) = n$ oraz $k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_r$ są liczbami naturalnymi.*

**Twierdzenie 3.6** *Niech dana będzie funkcja wymiarna*

$$f(x) = \frac{V_m(x)}{W_n(x)},$$

*gdzie wielomian $W_n(x)$ ma rozład (3.5). Wtedy $f(x)$ rozkłada się na ułmki proste postaci*

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{\alpha_{11}}{x - A_1} + \ldots + \frac{\alpha_{1k_1}}{(x - A_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{\alpha_{m1}}{x - A_m} + \ldots + \frac{\alpha_{mk_1}}{(x - A_m)^{k_m}} + \\ + {} & \frac{\beta_{11}x + \gamma_{11}}{(x - B_1)^2 + C_1} + \ldots + \frac{\beta_{1l_1}x + \gamma_{1l_1}}{((x - B_1)^2 + C_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{\beta_{r1}x + \gamma_{r1}}{(x - B_r)^2 + C_r} + \ldots + \frac{\beta_{rl_r}x + \gamma_{rl_r}}{((x - B_r)^2 + C_r)^{l_r}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Przykład 3.3** *Niech*

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}.$$

*Wtedy na mocy twierdzenie 3.6 mamy*

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 4}.$$

*sprowadzając do wspólnego mainownika i porównując liczniki otrzymujemy*

$$x^2 + 2x + 6 \equiv A(x - 2)(x - 4) + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1)(x - 2).$$

*wstawiając pierwiastki mianownika dostajemy rozwiązanie*

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = -7 \\ C = 5 \end{cases}.$$

**Przykład 3.4** *Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz $a \neq 0$.*

$$\int \frac{1}{(ax + b)^k}dx = \begin{cases} \frac{1}{|a|}\ln|ax + b| + c & \text{dla } k = 1 \\ \frac{1}{|a|(1 - k)}\frac{1}{(ax + b)^{k-1}} + c & \text{dla } k > 1 \end{cases}.$$

*Obliczając całkę dokonaliśmy podstawienia $t = ax + b$.*

**Przykład 3.5** *Niech $k \in \mathbb{N}$.*

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

*Niech teraz $k > 1$*

$$I_k \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx.$$

*całkując przez częćci iloczyn funkcji 1 i $\frac{1}{(x^2+1)^k}$ otrzymujemy zależność*

$$I_k = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 2k(I_k - I_{k+1}),$$

*a stąd*

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{2k-1}{2k}I_k.$$

## 3.3 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

**Definicja 3.3** *Funkcją wymierna $R(x_1, \ldots, x_n)$ zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielamianów zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.*

Bedziemy przez $R$ oznaczać funkcję wymierną.

**Lemat 3.1** *Niech $R(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x)$. Wtedy podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ przeprowadza do funkcji wymiernej zmiennej $t$. Mamy ponadto wtedy*

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{cases} \tag{3.7}$$

**Lemat 3.2** *Niech $R(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x)$. Wtedy podstawienie $t = \operatorname{tg} x$ przeprowadza do funkcji wymiernej zmiennej $t$. Mamy ponadto wtedy*

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt \end{cases} \tag{3.8}$$

## 3.4 Całkowanie funkcji niewymiernych. Podstawienia Eulera

W paragrafie tym zajmiemy się całkowanie szczególnego typu funkcji niewynmiernej, a mianowicie zawierającą jako niewymierrność pierwiatek kwadratowy z trójmianu kwadratowego.

**Przykład 3.6**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c.$$

**Przykład 3.7 (Metoda współczynników nieoznaczonych)** *Niech $W_n(x)$ będzie wielomiane stopnia $n$. Wtedy*

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = V_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

*gdzie $\lambda$ i współczynniki wielomaian $V_{n-1}$ sa nieznane. Obliczamy je z zależności*

$$W_n(x) = V_{n-1}'(x)(ax^2+bx+c) + V_{n-1}(x)(ax + \frac{b}{2}) + \lambda.$$

Rozważmy obecnie funkcję wymierną $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, gdzie $R$ jest funkcja wymierną dwóch zmiennych. Podamy dla niej ogólne podstawienia Eulera.

**I Podstawienia Eulera** $(a > 0)$

| Podstawienie | Pozostałe dane |
|---|---|
| $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ | $x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$ <br> $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}$ <br> $dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$ |

Można również stosować podstawienie $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$.

**II Podstawienia Eulera** $(c > 0)$

| Podstawienie | Pozostałe dane |
|---|---|
| $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ | $x = \frac{2\sqrt{a}t^2-b}{a-t^2}$ <br> $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}$ <br> $dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt$ |

Można również stosować podstawienie $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$.

**III Podstawienia Eulera** $(ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$ **oraz** $(\lambda \neq \mu)$

| Podstawienie | Pozostałe dane |
|---|---|
| $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ | $x = \frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}$ <br> $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}$ <br> $dx = 2\frac{a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$ |

**Tego na wykładzie nie było – inne podstawienia.**

Rozważać będzie funkcje wymierna postaci $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Dokonując odpowieniego podstawienia otrzymujemy jednego typu funkcję

$$R(t, \sqrt{1-t^2}) \tag{3.9}$$

$$R(t, \sqrt{t^2-1}) \tag{3.10}$$

$$R(t, \sqrt{t^2+1}) \tag{3.11}$$

Możemy dokonać wtedy odpowiednich postawień Eulera
$\sqrt{1-t^2} = z(1 \pm t)$, ewentualnie $tw - 1$;
$\sqrt{t^2-1} = z(t \pm 1)$, ewentualnie $t - w$;
$\sqrt{t^2+1} = zt \pm 1$, ewentualnie $t - w$.

Innymi podstawieniami, które można stosować w tej sytuacji są podstawienia
dla $\sqrt{1-t^2}$ podstawienia $t = \sin z, \cos z, \operatorname{tgh} z$;
dla $\sqrt{t^2-1}$ podstawienia $t = \cosh z, \frac{1}{\cos z}$;
dla $\sqrt{t^2+1}$ podstawienie $\sinh z, \operatorname{tg} z$.

## 3.5 Definicja całki Riemanna

Rozważać będziemy przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a < b$.

**Definicja 3.4** *Podziałem $P$ przedziału $[a, b]$ nazywamy skończony zbiór punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ o własności*

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b. \tag{3.12}$$

*Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ będziemy oznaczać $\mathcal{P}([a, b])$.*

**Definicja 3.5** *Niech $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Wtedy*

$$\Delta(P) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i, \tag{3.13}$$

*gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, nazywamy średnicą podziału $P$.*

**Definicja 3.6** *Niech $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$. Mówimy, że podział $P_2$ jest drobniejszy niż podział $P_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_1 \subseteq P_2$.*

**Uwaga 3.1** *Relacja "podział drobniejszy niż" jest zwrotna i przechodnia. Jest więc porządkiem częściowym.*

**Lemat 3.3** *Dla każdych dwóch podziałów istnieje podział drobniejszy od każdego z nich.*

Rozważać będziemy ograniczoną funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Niech $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ będzie ustalonym podziałem. Niech ponadto $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ oraz $M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ dla $i = 1, \dots, n$.

**Definicja 3.7** *Suma górna (Darboux) funkcji $f$ odpowiadającą podziałowi $P$ nazywamy liczbę $U(f,P)$ równą $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$. Suma dolną (Darboux) funkcji $f$ odpowiadającą podziałowi $P$ nazywamy liczbę $L(f,P)$ równą $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.*

**Definicja 3.8** *Całką górna Riemanna funkcji $f$ na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę oznaczaną*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(f,P). \tag{3.14}$$

*Całką dolną Riemanna funkcji $f$ na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę oznaczaną*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(f,P). \tag{3.15}$$

*Jeżeli całka górna i dolna Riemanna są sobie równe, to mówimy, że funkcje $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy $f \in \mathfrak{R}([a,b])$. Wspólną wartość tych całek oznaczamy*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

## 3.6 Zadania

**Zadanie 3.1** *Pokazać, że* $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c$.

**Zadanie 3.2** *Pokazać, że* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$.

# Wykład 4

# 2003.03.10 / 3h

## 4.1 Definicja całki Riemanna - Stieltjesa

Rozważać będziemy przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a < b$.

Rozważać będziemy ograniczoną funkcję $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Niech $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ będzie ustalonym podziałem. Niech ponadto $M \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ oraz $M_i \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Niech $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcja niemalejącą. Zdefiniujmy następujące pojęcia

$$\Delta\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \tag{4.1}$$

$$U(f, P, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \tag{4.2}$$

$$L(f, P, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \tag{4.3}$$

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha \equiv \overline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(f, P, \alpha) \tag{4.4}$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \equiv \underline{\int_a^b} f(x) d\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L(f, P, \alpha). \tag{4.5}$$

Obie całki nazywamy odpowiednio całką górną i dolną Riemanna - Stieltjesa funkcji $f$ względem funkcji $\alpha$ na przedziale $[a, b]$. Jeżeli są one równe, to ich wspólną wartość nazywamy całką Riemanna - Stieltjesa (ewentualnie Stieltjesa) funkcji $f$ względem funkcji $\alpha$ na przedziale $[a, b]$ (piszemy $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$) i oznaczamy ją

$$\int_a^b f d\alpha.$$

Zauważmy, że całka Riemanna jest szczególnym przpadkiem całki Riemanna - Stieltjesa dla funkcji $\alpha =$Id co zapisujemy $\mathfrak{R}(\mathrm{Id}, [a, b]) = \mathfrak{R}([a, b])$

**Lemat 4.1** *Zachodzą następujące nierówności*

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leqslant L(f, P, \alpha) \leqslant U(f, P, \alpha) \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a)). \tag{4.6}$$

Szkic dowodu.

Ponieważ $m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M$ i $\Delta\alpha_i \geqslant 0$ więc $m\Delta\alpha_i \leqslant m_i\Delta\alpha_i \leqslant M_i\Delta\alpha_i \leqslant M\Delta\alpha_i$. Sumując względem $i$ otrzymujemy tezę lematu.

□

**Uwaga 4.1** *Jeżeli $P$ będzie dowolym podziałam i $\overline{x}$ dowolnym punktem odcinka $[a, b]$, to przez $P \sqcup \{\overline{x}\}$ będziemy oznaczać podział otrzymany poprzez dołączenie punktu $\overline{x}$.*

**Twierdzenie 4.1** *Jeżeli podział $P_2$ jest drobniejszy niż podział $P_1$, to*

$$L(f,P_1,\alpha) \leqslant L(f,P_2,\alpha) \leqslant U(f,P_2,\alpha) \leqslant U(f,P_1,\alpha). \tag{4.7}$$

Szkic dowodu. Niech $P_2 = P_1 \sqcup \{\overline{x}\}$. Zakładając, że $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dla pewnego $n$ mamy

$$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, \overline{x}, x_i, \dots, x_n\}.$$

Niech ponadto $W_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[x_{i-1},\overline{x}} f(x)$, $W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in[\overline{x},x_i]} f(x)$, $w_1 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[x_{i-1},\overline{x}]} f(x)$, $w_2 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in[\overline{x},x_i]} f(x)$. Wtedy z własności kresów mamy

$$L(f,P_2,\alpha) - L(f,P_1,\alpha) = (w_1 - m_i)\,[\alpha(\overline{x}) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)\,[\alpha(x_i) - \alpha(\overline{x})] \geqslant 0$$

oraz

$$U(f,P_1,\alpha) - U(f,P_2,\alpha) = (M_i - W_1)\,[\alpha(\overline{x}) - \alpha(x_{i-1})] + (M_i - W_2)\,[\alpha(x_i) - \alpha(\overline{x})] \geqslant 0.$$

Kończy to dowód w tym przypadku.

Jeżeli mamy teraz dowolny podział $P_2$ drobniejszy niż $P_1$, to istnieje takie $k$ naturalne i istnieją skończone ciągi punktów $\overline{x^l}$ tego odcinaka i podziałów $P^l$ $(l = 1, \dots, k)$ taki, że

$$P_1, P^1 = P_1 \sqcup \{\overline{x^1}\}, P^2 = P^1 \sqcup \{\overline{x^2}\}, \dots, P^k = P^{k-1} \sqcup \{\overline{x^k}\} = P_2.$$

Stosując do każdych dwóch to samo rozumowanie otrzymyjemy tezę naszego twierdzenia.

□

**Twierdzenie 4.2** *Niech $P_1, P_2$ będą dowolymi podziałami. Wtedy*

$$L(f,P_1,\alpha) \leqslant U(f,P_2,\alpha). \tag{4.8}$$

Szkic dowodu. Wystarczy zastosować twierdzenie 4.1 do dowolnego podziału jednocześnie drobniejszego niż $P_1$ i $P_2$.

□

**Wniosek 4.1**

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha. \tag{4.9}$$

Szkic dowodu. Wystarczy skorzystać z określenia całki Riemanna - Stieltjesa, nierówności (4.8) i własności kresów.

□

**Twierdzenie 4.3 (Warunek konieczny i dostateczny całkowalności)** *$f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $P \in \mathcal{P}([a,b])$ taki, że*

$$U(f,P,\alpha) - L(f,P,\alpha) < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Szkic dowodu.
*(Dostateczność)*
Z definicji całki Riemanna - Stieltjesa mamy

$$\forall_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L((f,P,\alpha) \leqslant \underline{\int} f d\alpha \leqslant \overline{\int} f d\alpha \leqslant U(f,P,\alpha).$$

Stąd dla dowolego $\varepsilon > 0$ jeżeli $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$, to tym berdziej $0 \leqslant \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha < \varepsilon$. Przechodząc z granicą z $\varepsilon$ do zera otrzymujemy tezę.
*(Konieczność)*
Niech $\varepsilon > 0$ Istnieją takie podziały $P_1$ i $P_2$, że

$$U(f,P_1,\alpha) - \overline{\int} f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\underline{\int} f d\alpha - U(f,P_2,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Biorąc dowolny podziła drobniejszy niż $P_1$ i $P_2$ otrzymujem dla niego te same nierówność, a ponieważ całka dolna i górna są równe dodając stronami nierówności otrzymujemy tezę.

□

**Twierdzenie 4.4** *(i) Jeżeli nierówność (4.10) zachodzi dla pewnego podziału $P$, to zachodzi dla podziału drobniejszego z tym samym $\varepsilon$.*

*(ii) Jeżeli nierówność (4.10) zachodzi dla podziału $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i dla punkty $s_i, t_i$ są dowolymi punktami z odcinak $[x_{i-1}, x_i]$, to*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

*(iii) Jeżeli $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$ oraz spełnione są założenia (ii), to*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Szkic dowodu.
*(i)* Wynika z nierówności (4.7).
*(ii)* Wynika z faktu, że $|f(s_i) - f(t_i)| \leqslant M_i - m_i$

□

## 4.2 Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna - Stieltjesa

Niech dany będzie przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a < b$ oraz ograniczona funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ i niemalejąca funkcja $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 4.5** *Jeżeli $f$ jest funkcją ciągła na odcinku $[a, b]$, to $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$.*

Szkic dowodu. Mamy

1. $f$ jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in[a,b]}|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
2. $\alpha$ jest ograniczona więc $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\eta>0}\,[\alpha(b) - \alpha(a)]\,\eta < \varepsilon$

Niech $\varepsilon > 0$. Rozważmy $\eta > 0$ i $\delta > 0$ o własnościach $[\alpha(b) - \alpha(a)]\,\eta < \varepsilon$ oraz $\forall_{x,y\in[a,b]}|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$. Bierzemy podział taki, że $\Delta x_i < \delta$. Wtedy $M_i - m_i \leqslant \eta$. Stąd teza.

□

**Twierdzenie 4.6** *Jeżeli $f$ jest monotoniczna na przedziale $[a, b]$ i $\alpha$ jest ciągła, to $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$.*

Szkic dowodu. Mamy

1. $\alpha$ ma własność Darboux, więc $\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{P\in\mathcal{P}}\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$
2. Niech $\overline{f} = |f(b) - f(a)| + 1$, $\overline{\alpha} = \alpha(b) - \alpha(a) + 1$

Niech $\varepsilon > 0$. Rozważmy $n_0$ i podział $P$ o własnościach $n_0 = \left[\frac{\overline{\alpha}\overline{f}}{\varepsilon}\right] + 1$ i $\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n_0}$. Stąd teza.

□

**Twierdzenie 4.7** *Niech $f$ będzie funkcją ograniczoną i mającą tylko skończoną ilość punktów nieciągłości na przedziale $[a, b]$ i niech $\alpha$ będzie ciągła w każdym z punktów, w których nieciągła jest funkcja $f$. Wtedy $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$.*

Szkic dowodu. Niech $\varepsilon > 0$. Niech $E$ zbiorem punktów nieciągłości funkcji $f$. Jeżeli $E = \emptyset$, to teza wynika z twierdzenia 4.5. Niech teraz $E \neq \emptyset$ i niech $n = \operatorname{card} E$. Załóżmy, że zbiór $E$ został uporzadkowany przez relacje nie większy niż. Oznaczmy przez $T \overset{\text{ozn}}{=} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ i $\overline{\alpha} \overset{\text{ozn}}{=} \alpha(b) - \alpha(a) + 1$. Dla każdego $x_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$ wybieramy punkty $v_i, w_i$ o własnościach

1. $v_i < x_i < w_i$;
2. $\alpha(w_i) - \alpha(x_i) < \frac{\varepsilon}{8Tn}$ i $\alpha(x_i) - \alpha(v_i) < \frac{\varepsilon}{8Tn}$ (z ciągłości);
3. $w_i < v_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n - 1$.

Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha(w_i) - \alpha(v_i)] < \frac{\varepsilon}{4T}$$
$$\forall_{1\leqslant i<j\leqslant n}[v_i, w_i] \cap [v_j, w_j] = \emptyset$$

Niech $K = [a, b] - \bigcup_{i=1}^{n} ]v_i, w_i[$. K jest zwarty i funkcja $f$ na $K$ jest ciągła, a więc jednostajnie ciągła. Stąd weźmy $\delta > 0$ takie, że

$$\forall_{x,y\in K}|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\overline{\alpha}}.$$

Rozważmy podział $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ o własnościach

1. $v_i, w_i \in P$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$;
2. $x \notin P$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ i $x \in ]v_i, w_i[$;
3. $x_{l-1} \neq v_i \Rightarrow \Delta x_l < \delta$ dla $1 \leqslant l \leqslant m$ i $1 \leqslant i \leqslant n$ (z własności Darboux).

Dla tego podziału mamy

1. $M_l - m_l \leqslant 2T$ dla $l = 1, \ldots, m$;
2. $M_l - m_l \leqslant \frac{\varepsilon}{2\overline{\alpha}}$ o ile $x_{l-1} \neq v_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ i $l = 1, \ldots, m$.

Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, P, \alpha) - L(f, p, \alpha) &= \left(\sum_{l,x_{l-1}\neq v_i} + \sum_{l,x_{l-1}=v_i}\right)(M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \frac{\varepsilon}{2\overline{\alpha}}\sum_{l,x_{l-1}\neq v_i}\Delta\alpha_i + 2T\sum_{l,x_{l-1}=v_i}\Delta\alpha_i \\ &< \frac{\varepsilon}{2\overline{\alpha}}\sum_{1\leqslant l\leqslant m}\Delta\alpha_i + 2T\frac{\varepsilon}{4T} < \frac{\varepsilon}{2\overline{\alpha}}[\alpha(b) - \alpha(a)] + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Uwaga 4.2** *Zwrócimy uwagę, że pozbycie się warunku na monotoniczność powoduje zmniejszenie się liczby punktów nieciągłości, ponieważ funkcja monotoniczna ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.*

## 4.3 Zadania

**Zadanie 4.1** *Udowodnić twierdzenie 4.4 (iii)*

**Zadanie 4.2** *Policzyć z definicji całkę Riemanna - Stieltjesa z funckji stałej.*

# Wykład 5

# 2003.03.17 / 3h

## 5.1 Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna - Stieltjesa c.d.

Niech dany będzie przedział domknięty $[a,b]$, gdzie $a < b$ oraz ograniczona funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i niemalejąca funkcja $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 5.1** *Niech $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$ oraz niech dla dowolnego $x \in [a,b]$ zachodzą oszacowania $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Niech ponadto $\phi$ będzie funkcją ciągła na przedziale $[m,M]$ oraz niech $h \overset{\text{def}}{=} \phi \circ f$ na przedziale $[a,b]$. Wtedy $h \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$.*

**Uwaga 5.1** *Założenie o ciągłości funkcji $\phi$ jest istotne, co pokazuje następujący przykład.*

**Przykład 5.1** *Rozważmy funkcje Riemanna zdefiniowaną wzorem*

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \vee x = 0 \\ \frac{1}{m} & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \wedge x = \frac{n}{m} \wedge \mathrm{NWD}\ (n,m) = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

*Funkcja Riemanna jest ciągła w zbiorze liczb niewymiernych i zerze. Rozważmy funkcję $g$ zadaną wzorem*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

*Wówczas złożenie funkcji Riemanna i funckji $g$ jest funkcją Dirichleta. Udowodnimy później, że funkcja Riemanna jest funckją całkowalną w sensie Riemanna na każdym odcinku domkniętym.*

## 5.2 Własności całki Riemanna - Stieltjesa

Niech dany będzie przedział domknięty $[a,b]$, gdzie $a < b$ oraz ograniczone funkcje $f, f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i niemalejące funkcje $\alpha, \alpha_1, \alpha_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 5.2** ***(Własności całki Riemanna - Stieltjesa)*** *Niech $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$, $c \in \mathbb{R}$. Wtedy*

$$c \cdot f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b]) \wedge \int_a^b c \cdot f d\alpha = c \cdot \int_a^b f d\alpha \tag{5.2}$$

$$f_1 + f_2 \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b]) \wedge \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \tag{5.3}$$

$$\forall_{x \in [a,b]} f_1(x) \leqslant f_2(x) \Rightarrow \int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha \tag{5.4}$$

$$c \in ]a,b[ \Rightarrow f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,c]) \wedge f \in \mathfrak{R}(\alpha, [c,b]) \wedge \int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha \tag{5.5}$$

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in [a,b]} |f(x)| \leqslant M \Rightarrow \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a)) \tag{5.6}$$

$$f \in \mathfrak{R}(\alpha_1, [a,b]) \wedge f \in \mathfrak{R}(\alpha_2, [a,b]) \Rightarrow f \in \mathfrak{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a,b]) \wedge \int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2 \tag{5.7}$$

$$c \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f \in \mathfrak{R}(c \cdot \alpha, [a,b]) \wedge \int_a^b f d(c \cdot \alpha) = c \cdot \int_a^b f d\alpha \tag{5.8}$$

**Twierdzenie 5.3** *Niech* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$*. Wtedy*

$$f \cdot g \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b]) \tag{5.9}$$

**Twierdzenie 5.4** *Niech* $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$*. Wtedy*

$$|f| \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b]) \wedge \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha \tag{5.10}$$

**Definicja 5.1** *Jednostkową funkcją schodkowa (funkcja Heaviside'a) nazywamy funkcje postaci*

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & dla\ x \leqslant 0 \\ 1 & dla\ x > 0 \end{cases}. \tag{5.11}$$

**Twierdzenie 5.5** *Nich* $s \in ]a, b[$*,* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie ograniczoną oraz ciągła w* $s$ *i* $\alpha(x) = H(x - s)$*. Wtedy*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s). \tag{5.12}$$

**Twierdzenie 5.6** *Niech dany będzie ciąg* $\{a_n \in \mathbb{R}_+ : n \geqslant 1\}$ *taki, że* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny. Niech ponadto dany jest ciąg* $\{s_n : n \geqslant 1\} \subset ]a, b[$ *punktów parami różnych i niech*

$$\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n H(x - s_n). \tag{5.13}$$

*Niech* $f$ *będzie funkcją ciągłą na* $[a, b]$*. Wtedy*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(s_n). \tag{5.14}$$

**Twierdzenie 5.7** *Niech* $\alpha$ *będzie funkcją niemalejąca taką, że* $\alpha \in D([a, b])$ *i jej pochodna* $\alpha' \in \mathfrak{R}([a, b])$*. Niech* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ograniczoną. Wtedy następujące warunki są równoważne*

*(i)* $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a, b])$*,*

*(ii)*$f \cdot \alpha' \in \mathfrak{R}([a, b])$*.*

*W tym przypadku zachodzi równość*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx. \tag{5.15}$$

## 5.3 Zadania

**Zadanie 5.1** *Udowodnić, że funkcja Riemanna jest ciągła w zbiorze liczb niewymiernych i zerze.*

**Zadanie 5.2** *Udowodnić własność (5.8).*

# Wykład 6

# 2003.03.24 / 3h

## 6.1 Zamiana zmiennych w całce Riemanna - Stieltjesa

**Twierdzenie 6.1 (Zamian zmiennych)** *Niech $\phi\colon [A,B] \to [a,b]$ będzie surjekcją rosnącą. Niech $\alpha$ będzie funkcja niemalejącą na $[a,b]$ i niech $f \in \Re(\alpha,[a,b])$. Określamy funkcje $\beta, g\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ wzorami*

$$\beta = \alpha \circ \phi \wedge g = f \circ \phi. \tag{6.1}$$

*Wtedy $g \in \Re(\beta,[A,B])$ oraz*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha \tag{6.2}$$

**Uwaga 6.1** *Biorąc $\alpha =$Id otrzymujemy twierdzenie o zamianie zmiennych w całce Riemanna.*

**Wniosek 6.1** *Niech $\phi\colon [A,B] \to [a,b]$ będzie surjekcją rosnącą taką, że $\phi \in D([A,B])$ i $\phi' \in \Re([A,B])$ oraz niech $f \in \Re([a,b])$. Wtedy oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\phi(x))\phi'(x)dx \tag{6.3}$$

## 6.2 Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna – twierdzenie Lebesgue'a

**Uwaga 6.2** *Jeżeli $I$ będzie odcinkiem , to jego długość będziemy oznaczać $|I|$.*

**Definicja 6.1** *Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem miary zero względem miary Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje pokrycie $\{I_n : n \geqslant 1\}$ odcinkami zbioru $A$ tzn. $A \subseteq \{I_n : n \geqslant 1\}$ takie, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

**Lemat 6.1 (Własności zbiorów miary zero)** *(i) Dowolny podzbiór zbiór miary zero jest zbiorem miary zero.*

*(ii) przeliczalna suma zbiorów miary zer jest zbiorem miary zero.*

**Przykład 6.1** *Zbiór jednopunktowy jest zbiorem miary zero.*

**Przykład 6.2** *Zbiór przeliczalny jest zbiorem miary zero. W szczególności zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest zbiorem miary zero.*

**Definicja 6.2 (Konstrukcja zbioru Cantora)** *Niech $I_0 = [0,1]$. Określamy indukcyjnie dla $n \in \mathbb{N}$ zbiory $I_n$ następująco*

$$I_n = \frac{1}{3}I_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}I_{n-1}\right). \tag{6.4}$$

*Niech*

$$\mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \tag{6.5}$$

*Zbiór $\mathcal{C}$ nazywamy zbiorem Cantora. Jest on nieprzeliczalny.*[1]

[1]Porównaj wykłady ze *Wstepu do matematyki*

**Przykład 6.3** *Zbiór Cantora jest zbiorem miary zero.*

**Przykład 6.4** *Przedział zawierający co najmniej dwa punkty nie jest zbiorem miar zero.*

**Definicja 6.3** *Mówimy, że własność zachodzi w zbiorze liczb rzeczywistych prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów w których ]własność ta nie zachodzi jest zbiorem miary zero.*

**Twierdzenie 6.2 (Lebesgue'a)** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy następujące warunki są równoważne*

*(i)* $f \in \mathcal{R}([a,b])$

*(ii)* $f$ *jest prawie wszędzie ciągła na* $[a,b]$.

**Wniosek 6.2** *Niech $f, g \in \mathfrak{R}([a,b])$. Wtedy o ile prawie wszędzie funkcje $f$ i $g$ są równe, to ich całki są równe.*

## 6.3 Całkowanie (całka Riemanna), a różniczkowanie

Niech $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ taka, że $f \in \mathfrak{R}([a,b])$.

**Definicja 6.4** *Określamy funkcję $F_f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ następująco*

$$\forall_{t\in[a,b]} F_f(t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^t f(x)dx. \tag{6.6}$$

*Przyjmujemy jednocześnie* $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

**Twierdzenie 6.3** *Funkcja $F_f$ jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$.*

**Twierdzenie 6.4 (Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego)** *Niech funkcja $f$ będzie ciągła w punkcie $p \in [a,b]$, to $F_f$ jest różniczkowalna w $p$ oraz $F_f'(p) = f(p)$.*

**Wniosek 6.3** *Jeżeli $f \in C(]\alpha,\beta[)$, gdzie $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ oraz $a \in ]\alpha,\beta[$ i $F_a(t) = \int_a^t f(x)dx$, to wtedy dla dowolnego $b \in ]a,\beta[$ i funkcja $F_a \in C^1([a,b])$ oraz $F_a' = f$.*

**Twierdzenie 6.5 (Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego/ Newtona - Leibniza)** *Niech $f \in \mathfrak{R}([a,b])$. Jeżeli istnieje $F \in D([a,b])$ taka, że $F' = f$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.7}$$

**Uwaga 6.3** *Twierdzenie to można przy pomocy funkcji pierwotnej wypowiedzieć:*
*Jeżeli funkcja $f$ całkowalna w sensie Riemanna posiada funkcje pierwotną na przedziale $[a,b]$, to spełniony jest warunek (6.7).*

**Twierdzenie 6.6 (Całkowanie przez części)** *Niech $F, G \in D([a,b])$ i niech $F' \equiv f \in \mathfrak{R}([a,b])$ oraz $G' \equiv g \in \mathfrak{R}([a,b])$. Wtedy*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx. \tag{6.8}$$

## 6.4 Zadania

**Zadanie 6.1** *Udowodnić, że $|I_n| = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, gdzie zbiór $I_n$ pochodzi z* ***konstrukcji zbioru Cantora****.*

**Zadanie 6.2 (Twierdzenie o wartości średniej rachunku całkowego)** *Niech $a < b$ oraz $f \in C([a,b])$. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{c\in[a,b]} f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{6.9}$$

**Zadanie 6.3 (Twierdzenie o wartości średniej I dla całki Riemanna - Stieltjesa)** *Niech $a < b$, $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą oraz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ taką funkcją ograniczoną, że $f \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{\mu \in [\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}]} \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\mu. \tag{6.10}$$

**Zadanie 6.4 (Twierdzenie o wartości średniej II dla całki Riemanna - Stieltjesa)** *Niech $a < b$, $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą oraz $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ takimi funkcjąami ograniczonymi, że $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha, [a,b])$ oraz funkcja $g$ ma stale ten sam znak. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{\mu \in [\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}]} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{6.11}$$

**Zadanie 6.5 (Twierdzenie o wartości średniej IA dla całki Riemanna)** *Niech $a < b$ i $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $f$ jest jest funkcją nierosnącą i nieujemną, a $g \in \mathfrak{R}([a,b])$. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{\xi \in [a,b]} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int\limits_a^\xi g(x)dx. \tag{6.12}$$

**Zadanie 6.6 (Twierdzenie o wartości średniej IB dla całki Riemanna)** *Niech $a < b$ i $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $f$ jest jest funkcją niemalejąca i nieujemną, a $g \in \mathfrak{R}([a,b])$. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{\xi \in [a,b]} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int\limits_\xi^b g(x)dx. \tag{6.13}$$

**Uwaga 6.4** *Dwa ostanie wzory naszą nazwę wzorów Bonneta.*

**Zadanie 6.7 (Twierdzenie o wartości średniej II dla całki Riemanna)** *Niech $a < b$ i $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $f$ jest jest funkcją monotiniczną, a $g \in \mathfrak{R}([a,b])$. Udowodnić, że wtedy*

$$\exists_{\xi \in [a,b]} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int\limits_a^\xi g(x)dx + f(b) \int\limits_\xi^b g(x)dx. \tag{6.14}$$

# Wykład 7

# 2003.03.31 / 3h

## 7.1 Całki niewłaściwe Riemmana

Całki niewłaściwe ze względu na nieograniczony przedział.

**Definicja 7.1** *Niech* $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$*. Załóżmy, że dla dowolnego* $b > a$ *funkcja* $f$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a,b]$ $(f \in \mathfrak{R}([a,b]))$*. Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna (*$f$ *jest całkowalna) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica* $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$*. Piszemy wtedy*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

**Definicja 7.2** *Niech* $f\colon ]-\infty,b] \to \mathbb{R}$*. Załóżmy, że dla dowolnego* $a < b$ *funkcja* $f$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a,b]$ $(f \in \mathfrak{R}([a,b]))$*. Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ *jest zbieżna (*$f$ *jest całkowalna) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica* $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$*. Piszemy wtedy*

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Całki niewłaściwe ze względu na możliwą nieograniczoność funkcji (odcinek bez końca).

**Definicja 7.3** *Niech* $f\colon [a,B[\to \mathbb{R}$*. Załóżmy, że dla dowolnego* $a < b < B$ *funkcja* $f$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a,b]$ $(f \in \mathfrak{R}([a,b]))$*. Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_a^{B} f(x)dx$ *jest zbieżna (*$f$ *jest całkowalna) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica* $\lim\limits_{b\to B^-}\int\limits_a^b f(x)dx$*. Piszemy wtedy*

$$\int\limits_a^{B} f(x)dx = \lim_{b\to B^-}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

**Definicja 7.4** *Niech* $f\colon ]A,b] \to \mathbb{R}$*. Załóżmy, że dla dowolnego* $A < a < b$ *funkcja* $f$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a,b]$ $(f \in \mathfrak{R}([a,b]))$*. Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_A^{b} f(x)dx$ *jest zbieżna (*$f$ *jest całkowalna) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica* $\lim\limits_{a\to A^+}\int\limits_a^b f(x)dx$*. Piszemy wtedy*

$$\int\limits_A^{b} f(x)dx = \lim_{a\to A^+}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

**Przykład 7.1** *Całka* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *jest zbieżna dla* $\alpha > 1$ *i rozbieżna dla* $\alpha \leqslant 1$.

**Przykład 7.2** *Całka* $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *jest zbieżna dla* $\alpha < 1$ *i rozbieżna dla* $\alpha \geqslant 1$.

**Twierdzenie 7.1** *Jeżeli* $f \in \mathfrak{R}([a,B])$, *to całka niewłaściwa istnieje i jest równa całce Riemanna po przedziale* $[a,B]$.

Wszystkie twierdzenia będziemy formułować tylko dla przypadku przedziału $[a,\omega[$, gdzie albo $\omega = +\infty$ albo $\omega$ jest skończone, ale funkcja w punkcie $\omega$ ma granicę nieskończoną. Będziemy zakładać, że dla dowolnego $b \in ]a,\omega[$ mamy $f \in \mathfrak{R}([a,b])$.

**Twierdzenia dla dla przedziału $]\omega, \mathbf{b}]$, gdzie $\omega = +\infty$ albo $\omega$ jest skończone są analogiczne.**

**Twierdzenie 7.2 (Własności całek niewłaściwych)** *Załóżmy, że istnieją całki niewłaściwe funkcji* $f_1, f_2, f$.
*(i) Wtedy*

$$\int\limits_a^\omega (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))d\alpha = \alpha \int\limits_a^\omega f_1(x)dx + \beta \int\limits_a^\omega f_2(x)dx \tag{7.1}$$

$$\forall_{c \in ]a,\omega[} \int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\omega f(x)dx \tag{7.2}$$

*(ii) Jeżeli spełnione są warunki* $\phi\colon [\alpha,\gamma[ \to [a,\omega[$, *jest surjekcją rosnącą taką, że* $\phi \in D([\alpha,\gamma[)$ *i* $\phi' \in \mathfrak{R}([\alpha,b])$ *dla dowolnego* $b$ *z przedziału* $]\alpha,\gamma[$, *to wtedy*

$$\int\limits_\alpha^\gamma (f\circ\phi)(t)\phi'(t)dt \text{ istnieje oraz } \int\limits_\alpha^\gamma (f\circ\phi)(t)\phi'(t)dt = \int\limits_a^\omega f(x)dx. \tag{7.3}$$

*(iii) Niech* $F, G\colon [a,\omega[ \to \mathbb{R}$ *takie, że* $F, G \in D([a,\omega[)$ *oraz funkcje* $f \equiv F', g \equiv G' \in \mathfrak{R}([a,b])$ *dla dowolnego* $a < b < \omega$ *i istnieje skończona granica* $\lim\limits_{b\to\omega^-} F(b)G(b)$. *To wtedy istnieje całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega F(x)g(x)dx$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega f(x)G(x)dx$. *Zachodzi ponadto wzór*

$$\int\limits_a^\omega F(x)g(x)dx = \lim_{b\to\omega^-} F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int\limits_a^\omega f(x)G(x)dx. \tag{7.4}$$

**Twierdzenie 7.3** *Całka niewłaściwa z funkcji nieujemnej* $f$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy* $F_f$ *jest ograniczona na* $[a,b]$.

**Twierdzenie 7.4 (Kryterium porównawcze)** *Niech* $0 \leqslant f \leqslant g$ *na przedziale* $[a,\omega[$. *Wtedy*

*(i) jeżeli całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ *jest zbieżna, to całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *jest zbieżna.*

*(ii) jeżeli całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *jest rozbieżna, to całka niewłaściwa* $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ *jest rozbieżna.*

**Przykład 7.3** *Całka* $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *jest zbieżna, bo zbieżna jest całka* $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx$ *oraz* $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}dx$ *na przedziale* $[1,+\infty[$.

**Przykład 7.4** *Całka* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}dx$ *jest zbieżna, bo zbieżna jest całka* $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}dx$.

**Twierdzenie 7.5** *Niech* $\omega$ *będzie skończone. Niech* $f, g\colon [a,\omega[ \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi oraz* $g(x) \neq 0$ *dla pewnego sąsiedztwa* $S^-(\omega,\delta)$, *gdzie* $\delta > 0$. *Załóżmy, że istnieje skończona granica*

$$\lim_{x\to\omega^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Wtedy*
*(i) jeżeli* $A \neq 0$, *to całki niewłaściwe są jednocześnie albo zbieżne albo rozbieżne.*
*(ii) jeżeli* $A = 0$, *to o ile całka niewłaściwa* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *jest zbieżna, to zbieżna jest całka* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Twierdzenie 7.6 (Całkowe kryterium zbieżności szeregu)** *Niech funkcja $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ będzie nieujemna i nierosnąca oraz dla dowolnego $b\in[1,+\infty[$ spełniony jest warunek $f\in\mathfrak{R}([1,b])$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

*(i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *jest zbieżny*

*(ii)* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna.*

**Definicja 7.5** *Całkę niewłaściwą* $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ *nazywamy bezwzględnie zbieżną wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa* $\int\limits_{a}^{\omega} |f(x)|dx$ *jest zbieżna.*

**Definicja 7.6** *Niech $f$ będzie dowolną funkcją. Zdefiniujmy funkcję część nieujemną i niedodatnią*

$$f^+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{f+|f|}{2} \tag{7.5}$$

$$f^- \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{-f+|f|}{2}. \tag{7.6}$$

**Lemat 7.1** *Dla dowlnej funkcji $f=f^+-f^-$ oraz $|f|=f^++f^-$.*

**Uwaga 7.1** *Obie funkcje są nieujemne.*

**Twierdzenie 7.7** *Całka niewłaściwa bezwzględnie zbieżna jest zbieżna.*

**Twierdzenie 7.8 (Kryterium porównawcze zbieżności bezwzględnej)** *Niech $|f|\leqslant g$ na przedziale $[a,\omega[$. Wtedy, jeżeli całka niewłaściwa* $\int\limits_{a}^{\omega} g(x)dx$ *jest zbieżna, to całka niewłaściwa* $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ *jest bezwzględnie zbieżna.*

**Przykład 7.5** *Całka* $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ *jest zbieżna, lecz nie jest bezwzględnie zbieżna.*

**Twierdzenie 7.9 (Kryterium Abela - Dirichleta)** *Jeżeli funkcje $f,g\colon [a,\omega[\to\mathbb{R}$ spełniają założenia*

*(i)* $[a,\omega[\ni b\mapsto \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *jest ograniczona;*

*(ii) $g$ jest monotoniczna i* $\lim\limits_{t\to\omega^-} g(t)=0$*;*

*albo*

*(i)′ całka* $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ *jest zbieżna;*

*(ii)′ $g$ jest monotoniczna i ograniczona,*

*to całka* $\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx$ *jest zbieżna.*

**Przykład 7.6** *Całka* $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$*, gdzie $a>0$, jest bezwzględnie zbieżna dla $\alpha>1$ oraz zbieżna dla $0<\alpha\leqslant 1$.*

**Przykład 7.7** *Całka* $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^3)dx$ *jest zbieżna.*

## 7.2 Zadania

**Zadanie 7.1** *Udowodnić, że $f^+=\max\{f,0\}$ oraz $f^-=\max\{-f,0\}$.*

**Zadanie 7.2** *Udowodnić twierdzenie 7.5 (ii).*

**Zadanie 7.3** *Niech $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$, gdzie $a>0$ będzie funnkcja nieparzystą taką, że $f\in\mathfrak{R}([-a,a])$. Udowodnić, że* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

**Zadanie 7.4** *Niech $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$, gdzie $a>0$ będzie funnkcja parzystą taką, że $f\in\mathfrak{R}([-a,a])$. Udowodnić, że* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

# Wykład 8

# 2003.04.07 / 3h

## 8.1 Całki niewłaściwe Riemmana zbieżne w sensie wartości głównej

**Definicja 8.1** *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oraz dla dowolnych* $a < b$ *mamy* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$. *Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *jes zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $c \in \mathbb{R}$ *całki* $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ *i* $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ *niewłaściwe są zbieżne. Piszemy wtedy*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{8.1}$$

**Uwaga 8.1** *Należy podkreślić, że trzeba udowodnić, że definicja nie zależy od wyboru punktu* $c$.

**Definicja 8.2** *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oraz dla dowolnych* $a < b$ *mamy* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$. *Mówimy, że całka niewłaściwa* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna w sensie wartości głównej Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{8.2}$$

*Oznaczamy jej wartość przez* V.P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

**Przykład 8.1** *Rozważmy funkcję* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *określoną wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

*Wtedy dla dowolnego* $R > 0$ *mamy* $\int\limits_{0}^{R} f(x)dx = R$ *oraz* $\int\limits_{-R}^{0} f(x)dx = -R$, *a więc obie całki niewłaściwe są rozbieżne, ale* $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 0$ *i stąd* V.P. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

**Definicja 8.3** *Niech* $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, *gdzie* $a > 0$. *Zdefinujmy część parzystą i nieparzystą funkcji* $f$.

$$f^P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{8.3}$$

$$f^N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{8.4}$$

**Lemat 8.1** *Niech* $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, *gdzie* $a > 0$. *Wtedy* $f = f^P + f^N$.

**Twierdzenie 8.1** *Niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *oraz dla dowolnych* $a < b$ *mamy* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$. *Całka niewłaściwa* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna w sensie wartości głównej Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżna całka niewłaściwa* $\int\limits_{0}^{+\infty} f^P(x)dx$.

**Definicja 8.4** *Niech* $f\colon [a,c[\cup]c,b] \to \mathbb{R}$, *gdzie* $a < c < b$. *Niech dla dowolnych* $a_1, b_1$ *takich, że* $a < a_1 < c < b_1 < b$ *mamy* $f \in \mathfrak{R}([a,a_1]) \cap \mathfrak{R}([b_1,b])$. *Mówimy, że całka* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *jest zbieżna w sensie wartości głównej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right) \tag{8.5}$$

*Oznaczamy wtedy jej wartość przez* V.P. $\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Przykład 8.2** *Niech* $a < 0 < b$. *Wtedy* V.P. $\int\limits_a^b \frac{1}{x}dx = \ln\frac{b}{|a|}$, *chociaż nie istnieją całki* $\int\limits_a^0 \frac{1}{x}dx$ *i* $\int\limits_0^b \frac{1}{x}dx$.

## 8.2 Ważne całki niewłaściwe

**Definicja 8.5** *Całką Eulera II rodzaju lub funkcją gamma nazywamy funkcje*

$$]0,+\infty[\mapsto \Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{8.6}$$

**Uwaga 8.2** *Mamy tutaj doczynienia z nieskończonym przedziałem całkowania oraz osobliwościa w zerze (wartość funkcji dąży do nieskończoności).*

**Definicja 8.6** *Całką Eulera I rodzaju lub funkcją beta nazywamy funkcje*

$$(p,q) \ni ]0,+\infty[\times]0,+\infty[\mapsto \beta(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{8.7}$$

**Definicja 8.7** *Całką Fresnela nazywamy całkę*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx. \tag{8.8}$$

**Lemat 8.2** *Całka Fresnela jest zbieżna.*

## 8.3 Funkcja logarytmiczna (wg Kleina) i wykładnicza – inaczej

Przedstawimy inna definicję funkcji logarytmicznej i wykładniczej.

Niech $a < b$ i $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz $f \in \mathfrak{R}([a,b])$.

Przyjmujemy następującą definicję.

$$\int\limits_b^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{8.9}$$

**Definicja 8.8** *Funkcję*

$$]0,+\infty[\ni x \mapsto \ln x \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_1^x \frac{1}{t}dt \tag{8.10}$$

*nazywamy logarytmem naturalnym.*

**Twierdzenie 8.2 (Własności logarytmu)** *(i) Funkcja określona na* $]0,+\infty[$*;*
*(ii)* $\ln 1 = 0$*;*
*(iii) logarytm naturalny jest funkcją rosnącą;*
*(iv)* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$*;*
*(iv)'* $\ln a^n = n\ln a$*;*

*(iv)''* $\ln\left(\prod_{l=1}^{n} a_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \ln a_l$;
*(v)* $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$;
*(vi)* $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

**Definicja 8.9** *Funkcję odwrotną do logarytmu naturalnego tzn.*

$$\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\ln x)^{-1} \tag{8.11}$$

*nazywamy funkcją wykładniczą.*

**Twierdzenie 8.3 (Własności funkcji wykładniczej)** *(i)* $\exp\colon \mathbb{R} \to ]0,+\infty[$;
*(ii)* $(\exp x)' = \exp x$;
*(iii)* $\exp 0 = 1$;
*(iv)* $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$;
*(iv)'* $\exp(na) = (\exp a)^n$;
*(iv)''* $\exp\left(\sum_{l=1}^{n} a_l\right) = \prod_{l=1}^{n} \exp a_l$;
*(v)* $\exp(-a) = \frac{1}{\exp a}$.

**Definicja 8.10** *Wrowadźmy liczbę* $\mathfrak{e}$ *następująco*

$$\mathfrak{e} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1). \tag{8.12}$$

**Twierdzenie 8.4** *Mamy następującą równość*

$$\mathfrak{e} = e, \tag{8.13}$$

*gdzie* $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

**Uwaga 8.3** *Udowodnimy w następnym twierdzeniu znacznie więcej. Mianowicie, że poprzednie definicje funkcji logarytmicznej i wykładniczej (za pomocą szeregu) są identyczne z obecnymi (za pomocą całki).*

**Twierdzenie 8.5** *Niech* $f \in D(\mathbb{R})$ *spełnia warunki* $f'(x) = f(x)$ *i* $f(0) = 1$*. Wtedy* $f(x) = \exp(x)$.

**Uwaga 8.4** *Jeżeli wiemy,*[1] *że* $(e^x)' = e^x$*, to powyższe twierdzenie orzeka, że funkcja wykładniacza wprowadzona w tym paragrafie jest tym samym co definicja* $e^x$ *przy pomocy szeregu potęgowego tj. postaci* $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

**Definicja 8.11** *Potęgą ogólną o podstawie* $a > 0$ *nazywamy funkcje*

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \cdot \ln a) \tag{8.14}$$

**Definicja 8.12** *Funkcją potęgową nazywamy funkcje*

$$]0,+\infty[\ni x \mapsto x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \cdot \ln x), \tag{8.15}$$

*gdzie* $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Definicja 8.13** *Niech* $a > 0$ *i* $a \neq 1$ *funkcją odwrotną do potęgi ogólnej nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a tzn.*

$$\log_a x \stackrel{\text{def}}{=} (a^x)^{-1}. \tag{8.16}$$

**Twierdzenie 8.6 (Własności potęgi ogólnej)** *(i)* $a^0 = 1$;
*(ii)* $(a^x)' = a^x \ln a$.

**Twierdzenie 8.7 (Własności funkcji potęgowej)** *(i)* $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$;
*(ii)* $x^0 = 1$;
*(iii)* $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$;
*(iv)* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

[1] O tym przkonamy się juz niedługo.

## 8.4 Całkowanie funkcji o wartościach wektorowych – funkcje wektorowe

Rozważamy $\mathbb{R}^d$, gdzie $d \geqslant 1$.

Niech $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ wtedy iloczyn skalarny dwóch wektorów oraz długość wektora możemy określić następująco

$$\vec{x} \circ \vec{y} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{d} x_i y_i \tag{8.17}$$

$$\|\vec{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\vec{x} \circ \vec{x})} \equiv \sqrt{\sum_{n=1}^{d} x_i^2}. \tag{8.18}$$

Niech $A\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ będzie odwzorowaniem liniowym (reprezentuje je macierz $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i \leqslant d_2, 1 \leqslant j \leqslant d_1}$) i niech $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$. Wtedy $A \cdot \vec{x}$ jest wektorem z $\mathbb{R}^{d_2}$, którego współrzędne zdefiniowane są równościami $(A \cdot \vec{x})_j = \sum\limits_{n=1}^{d_1} a_{jn} x_n$ dla $j = 1, \ldots, d_2$.

**Lemat 8.3** *Niech dane będą wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Wówczas spełniona jest nierówność Schwarza*

$$|\vec{x} \circ \vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|. \tag{8.19}$$

**Definicja 8.14** *Funkcją wektorową $\vec{f}$ nazywamy odwzorowanie $\vec{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$, gdzie*

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_d(t)) \tag{8.20}$$

*oraz dla dowolnego $i = 1, \ldots, d$ $f_i$ są funkcjami z $[a,b]$ w $\mathbb{R}$.*

## 8.5 Zadania

**Zadanie 8.1** *Udowodnić, że $f^p$ jest funkcją parzysta, a $f^N$ jest funkcją nieparzystą.*

**Zadanie 8.2** *Niech $x > 0$. Udowodnić, że*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{8.21}$$

$$\Gamma(1) = 1 \tag{8.22}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ dla } n \in \mathbb{N} \tag{8.23}$$

**Zadanie 8.3** *Niech $p, q > 0$. Udowodnić, że*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p) \tag{8.24}$$

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1) \tag{8.25}$$

$$\beta(p,1) = \frac{1}{p} \tag{8.26}$$

$$\beta(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\beta(p,n-1) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)\cdot \ldots \cdot (p+1)}\beta(p,1) \tag{8.27}$$

$$\beta(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \tag{8.28}$$

**Zadanie 8.4** *Udowodnić nierówność Schwarza (lemat 8.3).*

# Wykład 9

# 2003.04.14 / 3h

## 9.1 Całkowanie funkcji o wartościach wektorowych – długość łuku krzywej

**Uwaga 9.1** *Pisząc, że funkcja wektorowa należy do pewnej klasy (np. jest ciągła) mamy na myśli, że wszystkie jej składowe są z tej klasy.*

**Definicja 9.1** *Mówimy, że funkcja $\vec{f}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i = 1, \ldots, d$ całkowalne są funkcje $f_i$ ($f_i \in \Re([a,b])$). Piszemy wtedy $\vec{f} \in \Re([a,b], \mathbb{R}^d)$. Ponadto*

$$\int\limits_a^b \vec{f}(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} (\int\limits_a^b f_1(t)dt, \ldots \int\limits_a^b f_d(t)dt). \tag{9.1}$$

**Twierdzenie 9.1 (Newtona - Leibniza)** *Jeżeli $\vec{f} \in \Re([a,b], \mathbb{R}^d)$ i istnieje $\vec{F} \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$ taka, że $\vec{F}' = \vec{f}$, to*

$$\int\limits_a^b \vec{f}(t) = \vec{F}(b) - \vec{F}(a). \tag{9.2}$$

**Twierdzenie 9.2** *Jeżeli $\vec{f} \in \Re([a,b], \mathbb{R}^d)$, to*
*(i)* $\|\vec{f}\| \in \Re([a,b])$,
*(ii)* $\|\int\limits_a^b \vec{f}(t)dt\| \leqslant \int\limits_a^b \|\vec{f}(t)\|dt$.

**Definicja 9.2** *Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Krzywą $\gamma$ nazywamy prostowalną wtedy i tylko wtedy, gdy $L(\gamma) < +\infty$, gdzie $L(\gamma) = \sup\limits_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \sum\limits_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$, punkty $t_i$ są punktami podziału $P$.*

**Twierdzenie 9.3** *Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ będzie krzywą klasy $C^1([a,b])$ (wszystkie jej składowe są klasy $C^1([a,b])$). Wtedy krzywa $\gamma$ jest prostowalna oraz*

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|dt, \tag{9.3}$$

*gdzie* $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \ldots + (\gamma_d'(t))^2}$.

## 9.2 Zbieżność ciągów funkcyjnych – podstawowe pojęcia

Niech $X \neq \emptyset$ i $(X, \tau)$ będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\{f_n\colon X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem funkcji oraz $f\colon X \to \mathbb{R}$.

**Definicja 9.3** *Mówimy, że ciąg $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x \in X} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \tag{9.4}$$

*czyli*

$$\forall_{x\in X}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{9.5}$$

*Piszemy wtedy* $f_n \to f$.

**Definicja 9.4** *Mówimy, że ciąg* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji* $f$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}\forall_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{9.6}$$

*Piszemy wtedy* $f_n \rightrightarrows f$.

**Definicja 9.5** *Mówimy, że ciąg funkcyjny* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *jest zbieżny lokalnie jednostajnie na zbiorze* $X$ *do funkcji* $f$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu* $x \in X$ *istnieje jego otocznie* $\mathcal{O}_x \subset X$, *że ciąg funkcyjny na tym otoczeniu zbiega jednostajnie tzn.*

$$\forall_{x\in X}\exists_{\mathcal{O}_x}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}\forall_{t\in\mathcal{O}_x}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon. \tag{9.7}$$

*Piszemy wtedy* $f_n \overset{\mathrm{L}}{\rightrightarrows} f$.

**Definicja 9.6** *Mówimy, że ciąg funkcyjny* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *jest zbieżny niemal jednostajnie na zbiorze* $X$ *do funkcji* $f$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru zwartego* $K \subset X$ *ciąg funkcyjny na tym zbiorze zbiega jednostajnie tzn.*

$$\forall_{K\subseteq X,\, zwartego}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}\forall_{t\in K}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon. \tag{9.8}$$

*Piszemy wtedy* $f_n \overset{\mathrm{N}}{\rightrightarrows} f$.

**Wniosek 9.1** *Następujące warunki są równoważne*

$$f_n \rightrightarrows f \tag{9.9}$$

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \to 0 \tag{9.10}$$

**Twierdzenie 9.4** *Jeżeli ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie, to jest zbieżny lokalnie jednostajnie.*

**Twierdzenie 9.5** *Jeżeli ciąg funkcyjny jest zbieżny lokalnie jednostajnie, to jest zbieżny niemal jednostajnie.*

**Wniosek 9.2** *Jeżeli ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie, to jest zbieżny niemal jednostajnie.*

**Twierdzenie 9.6** *Jeżeli ciąg funkcyjny jest zbieżny lokalnie jednostajnie, to jest zbieżny punktowo.*

**Wniosek 9.3** *Jeżeli ciąg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie, to jest zbieżny punktowo.*

## 9.3 Zadania

**Zadanie 9.1** *Udowodnić, że jeżeli* $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ *oraz* $a \in \mathbb{R}$, *to*

$$\|a\cdot\vec{x}\| = |a|\cdot\|\vec{x}\| \tag{9.11}$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\| \tag{9.12}$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\| \tag{9.13}$$

$$\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}+\vec{y}\| \tag{9.14}$$

$$\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \tag{9.15}$$

$$|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \tag{9.16}$$

**Zadanie 9.2** *Określmy funkcję* $d_{\mathfrak{E}}\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+\cup\{0\}$ *wzorem*

$$d_{\mathfrak{E}}(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|. \tag{9.17}$$

*Pokazać, że spełnia ona warunki definicji odległości, a więc* $(\mathbb{R}^d, d_{\mathfrak{E}})$ *jest przestrzenią metryczną.*

# Wykład 10

# 2003.05.05 / 3h

## 10.1 Zbieżność ciągów funkcyjnych c.d.

Niech $X \neq \emptyset$ i $(X, \tau)$ będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem funkcji oraz $f : X \to \mathbb{R}$.

**Przykład 10.1** *Niech $X = [0,1]$ oraz $f_n(x) = x^n$. Wtedy $(f_n)$ zbiega punktowo do funkcji*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } x \in [0,1[ \\ 1 & \textit{dla } x = 1 \end{cases}.$$

*Nie jest zbieżny ani jednostajnie, ani niemal jednostajnie, ani lokalnie jednostajnie.*

**Przykład 10.2** *Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Wtedy $(f_n)$ zbiega punktowo do funkcji $f \equiv 0$. Podobnie nie zbiega on ani jednostajnie, ani niemal jednostajnie, ani lokalnie jednostajnie.*

**Przykład 10.3** *Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Wtedy $(f_n)$ zbiega punktowo do funkcji $f \equiv 0$. Zbiega on jednostajnie, a więc i niemal jednostajnie oraz lokalnie jednostajnie.*

**Przykład 10.4** *Niech $X = \mathbb{R}$ oraz $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$. Wtedy $(f_n)$ zbiega punktowo do funkcji $f \equiv 0$, nie zbiega on jednostajnie, ale zbiega niemal jednostajnie oraz lokalnie jednostajnie.*

**Twierdzenie 10.1** *Jeżeli $X$ jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej.*

**Wniosek 10.1** *Jeżeli $X$ jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna jest równoważna zbieżności lokalnie jednostajnej.*

**Definicja 10.1** *Przestrzeń topologiczną $(X, \tau)$ nazywamy lokalnie zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt ma otocznie będące zbiorem zwartym.*

**Przykład 10.5** *Jednowymiarowa przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią lokalnie zwartą.*

**Przykład 10.6** *Każdy odcinek otwarty jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej jest przestrzenią lokalnie zwartą.*

**Twierdzenie 10.2** *Jeżeli $(X, \tau)$ jest przestrzenią lokalnie zwartą, to zbieżność niemal jednostajna jest równoważna zbieżności lokalnie jednostajnej.*

**Uwaga 10.1** *Pojęcie przestrzeni lokalnie zwartej jest osłabieniem warunku przestrzeni zwartej, gdyż dowolny zbiór otwarty przestrzeni zwartej jest lokanie zwarty.*

**Wniosek 10.2** *Dla jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej zbieżność niemal jednostajna i lokalnie jednostajnej są równoważne.*

**Definicja 10.2** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \geqslant n_0} \forall_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

**Twierdzenie 10.3** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego.*

Od tej chwili rozważamy zamiast przestrzeni topologicznej $(X, \tau)$ przestrzeń metryczną $(X, d)$.

**Twierdzenie 10.4** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do funkcji $f$ oraz wszystkie wyrazy tego ciągu są funkcjami ciągłymi w punkcie $p \in X$, to $f$ jest funkcją ciągłą w punkcie $p$.*

**Wniosek 10.3** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do funkcji $f$ oraz wszystkie wyrazy tego ciągu są funkcjami ciągłymi, to $f$ jest funkcją ciągłą.*

**Uwaga 10.2** *Istnieje ciąg funkcyjny funkcji ciągłych zbieżny punktowo do funkcji ciągłej, który nie jest zbieżny lokalnie jednostajnie.*

**Przykład 10.7** *Niech $X = [-1, 1]$ oraz niech $f_n = n^2 x(1 - x^2)^n$. Wtedy $f_n \to f \equiv 0$ i wszystkie funkcje są ciągłe. Jednak zbieżność nie jest lokalnie jednostajna (dla punktu x=0 nie istnieje otoczenie, gdzie byłaby zbieżność jednostajna), gdyż dla $p = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$ mamy $f_n(p) = \frac{n^2}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n \to +\infty$, gdy $n \to +\infty$.*

**Wniosek 10.4** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f$ oraz wszystkie wyrazy tego ciągu są funkcjami ciągłymi, to $f$ jest funkcją ciągłą.*

**Uwaga 10.3** *Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 10.4.*

**Twierdzenie 10.5** *Niech punkt $p \in X$ będzie punktem skupienia zbioru $E \subseteq X$ oraz niech $\{f_n\colon E \to \mathbb{R} | n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem zbieżnym jednostajnie na zbiorze $E$. Wtedy ciąg liczbowy $(A_n)$, gdzie $A_n = \lim\limits_{x \to p} f_n(x)$, jest zbieżny oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to p} f_n(x) = \lim_{x\to p} \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{10.2}$$

**Uwaga 10.4** *Przy dodatkowych założeniach otrzymujemy twierdzenie odwrotne do twierdzenia 10.4.*

**Twierdzenie 10.6 (Diniego)** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią lokalnie zwartą. Niech ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ funkcji ciągłych będzie monotonicznie zbieżny do funkcji ciągłej $f$. Wtedy ciąg tej jest lokalnie jednostajnie zbieżny.*

**Uwaga 10.5** *Ponieważ w przestrzenie lokalnie zwartej zbieżność niemal jednostajna i lokalnie jednostajna są równoważne, to w twierdzeniu* ***Diniego*** *wystarczy udowodnić zbieżność niemal jednostają.*

## 10.2 Zadania

**Zadanie 10.1** *Pokazać bezpośrednio z definicji, że ciąg funkcyjny z przykładu 10.1 nie jest jednostajnie, lokalnie jednostajnie i niemal jednostajnie zbieżny.*

# Wykład 11

# 2003.05.12 / 3h

## 11.1 Zbieżność jednostajna ciągu funkcji jednostajnie ciągłych

**Twierdzenie 11.1** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f$ oraz wszystkie wyrazy tego ciągu są funkcjami jednostajnie ciągłymi, to $f$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.*

## 11.2 Przestrzeń $C(X)$

**Definicja 11.1** *Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną. Zbiór wszystkich funkcji ciągłych i ograniczonych na $X$ oznaczamy przez $C(X)$. Odwzorowanie*

$$C(X) \ni f \mapsto \|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{11.1}$$

*nazywamy normą supremum.*

**Lemat 11.1** *Norma supremum spełnia natępujące warunki*

$$\forall_{x \in C(X)} \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 \tag{11.2}$$

$$\forall_{f,g \in C(X)} \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \tag{11.3}$$

**Twierdzenie 11.2** *Odwzorowanie*

$$C(X) \times C(X) \ni (f, g) \mapsto d_{\sup}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \|f - g\| \tag{11.4}$$

*jest metryką w $C(X)$. Nazywamy ją metryką supremum.*

**Wniosek 11.1** *Ciąg funkcyjny $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ jest zbieżny do funkcji $f$ w sensie metryki supremum wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \rightrightarrows f$.*

**Stwierdzenie 11.1** *Przestrzeń metryczna $(C(X), d_{\sup})$ jest zupełna.*

**Uwaga 11.1** *Jeżeli $X$ jest zwarta, to obraz każdej funkcji ciągłej jest zwarty, a więc domknięty i ograniczony. Wynika stąd, że w tym przypadku za definicji zbioru $C(X)$ możemy przyjąć wyłacznie warunek ciągłości funkcji.*

## 11.3 Zbieżność szeregów funkcyjnych

Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem funkcji oraz $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ będzie ciągiem sum częściowych.

**Uwaga 11.2** *Można zamiast przestrzeni metrycznej $(X, d)$ rozpatrywać ewentualnie sytuację $X \subseteq \mathbb{R}$.*

**Definicja 11.2** *Mówimy, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny punktowo (odpowiednio jednostajnie, lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie) wtedy i tylko wtedy, gdy jego ciąg sum częściowych jest zbieżny punktowo (odpowiednio jednostajnie, lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

**Definicja 11.3** *Mówimy, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *jest zbieżny punktowo.*

**Uwaga 11.3** *Przez zbiór punktów zbieżności (zbieżności bezwzględnej) będziemy rozumieć zbiór tych wszystkich punktów* $x \in X$ *dla których szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *(odpowiednio szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$*) jest zbieżny punktowo. Natomiast przez obszar zbieżności będziemy rozumieć wnętrze zbioru punktów zbieżności, czyli nawiększy zbiór otwarty zawarty w zbiorze punktów zbieżności.*

*Należy podkreślić, że zbiór punktów zbieżności może być niepusty podczas, gdy obszar zbieżności może być pusty.*

**Twierdzenie 11.3** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}\forall_{k\in\mathbb{N}}\forall_{x\in X}\left|\sum_{m=1}^{k} f_{n+m}(x)\right| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

**Twierdzenie 11.4** *Niech dany będzie ciąg* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *funkcji ciągłych, jeżeli szereg jest zbieżny lokalnie jednostajnie, to funkcja* $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest funkcją ciągłą.*

**Twierdzenie 11.5 (Kryterium Weierstrassa)** *Jeżeli spełnione są warunki*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in X}|f_n(x)| \leqslant a_n \tag{11.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \tag{11.7}$$

*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie.*

**Twierdzenie 11.6 (Dirichleta)** *Dane są dwa ciągi funkcyjne* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *i* $\{g_n : n \geqslant 1\}$. *Jeżeli spełnione są warunki*
*(i) Ciąg sum częściowych ciągu* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *jest jednostajnie ograniczony*
*(ii) Ciąg* $\{g_n : n \geqslant 1\}$ *jest nierosnący*
*(iii) Ciąg* $\{g_n : n \geqslant 1\}$ *jest jednostajnie zbieżny do funkcji tożsamościowo równej zeru,*
*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

**Twierdzenie 11.7 (Abela)** *Dane są dwa ciągi funkcyjne* $\{f_n : n \geqslant 1\}$ *i* $\{g_n : n \geqslant 1\}$. *Jeżeli spełnione są warunki*
*(i) Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny*
*(ii) Ciąg* $\{g_n : n \geqslant 1\}$ *jest monotoniczny*
*(iii) Ciąg* $\{g_n : n \geqslant 1\}$ *jest jednostajnie ograniczony*
*to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

## 11.4 Zadania

**Zadanie 11.1** *Rozważamy normę supremum nie tylko w zbiorze* $C(X)$. *Oznacza to, że może przyjmoważ ona wartości nieskończone* $(+\infty)$. *Wzorując się na warunku koniecznym i dostatecznym zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego udowodnić następujące twierdzenie:*

*Szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg liczbowy* $\sum\limits_{n} \|f_n\|$ *jest zbieżny.*

# Wykład 12

# 2003.05.19 / 3h

## 12.1 Zbieżność szeregów funkcyjnych - zbieżność jednostajna i bezwzględna

**Przykład 12.1** *Niech*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & dla\ \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & dla\ \frac{1}{n} < x \end{cases}. \tag{12.1}$$

*Wówczas* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej. Nie jest zbieżny jednostajnie oraz jest w każdym punkcie zbieżny bezwzględnie.*

**Przykład 12.2** *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ *jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale ograniczonym, lecz nie jest w żadnym punkcie zbieżny bezwzględnie.*

## 12.2 Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

**Przykład 12.3** *Rozważmy ciąg funkcyjny* $f_n\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *określony następująco*

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} n\sin(nx) & dla\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n} \\ 0 & dla\ \frac{\pi}{n} < x \leqslant \pi \end{cases}.$$

*Wtedy* $f_n \to f \equiv 0$*, ale* $\int\limits_0^\pi f_n(x)dx \to 2 \neq 0 = \int\limits_0^\pi f(x)dx$.

Niech $a < b$ oraz niech dany będzie ciąg funkcyjny $\{f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$.

**Twierdzenie 12.1** *Jeżeli dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $f_n \in \mathfrak{R}([a,b])$ *oraz* $f_n \rightrightarrows f$*, to wtedy*
*(i)* $f \in \mathfrak{R}([a,b])$
*(ii)* $\int\limits_a^b f_n(x)dx \to \int\limits_a^b f(x)dx$.

**Wniosek 12.1** *Jeżeli* $f_n \in \mathfrak{R}([a,b])$ *dla dowolnej liczby naturalnej* $n$ *oraz szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest zbieżny jednostajnie, to*
*(i) funkcja* $[a,b] \ni x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest całkowalna w sensie Riemanna oraz*
*(ii)* $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Niech teraz $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $p \in ]a,b[$ i $f_n\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ dla $n \geqslant 1$.

**Twierdzenie 12.2** *Niech dla dowolnej liczby naturalne* $n$ *funkcje* $f_n$ *są ciągłe na* $]a,b[$ *(*$f_n \in C(]a,b[)$*) oraz* $f_n$ *zbiega lokalnie jednostajnie do* $f$*. Wtedy* $F_n(x) = \int\limits_p^x f_n(t)dt$ *zbiega lokalnie jednostajnie do funkcji* $F(x) = \int\limits_p^x f(t)dt$.

**Wniosek 12.2** *Niech dla dowolnej liczby naturalne $n$ funkcje $f_n$ są ciągłe na $]a,b[$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do $f$. Niech $F_n(x)=\int\limits_p^x f_n(t)dt$. Wtedy*

*(i) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $]a,b[$*

*(ii) $\int\limits_p^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_p^x f_n(t)dt$.*

**Przykład 12.4** *Policzymy następującą całkę*

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right) dx.$$

*Ponieważ $|ne^{-nx}| \leqslant ne^{-n\ln 2} = n\left(\frac{1}{2}\right)^2$ na $[\ln 2, \ln 3]$ wiec kryterium z Weierstrassa szereg jest jednostajnie zbieżny i można zmienić kolejność całkowania i różniczkowania. Otrzymujemy wtedy*

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right) dx = \frac{1}{2}.$$

**Przykład 12.5** *Policzymy sumę szeregu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

*Szereg jest lokalnie jednostajnie zbieżny na $]-1,1[$, a więc $\int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right) dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x (n+1)t^n dt\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$. Tak więc różniczkując obie strony równości otrzymujemy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

## 12.3 Różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych

**Przykład 12.6** *Niech $f_n\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem $f_n(x)=|x|^{\frac{n+1}{n}}$. Mamy wtedy $f_n\in C^1([-1,1])$ i $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f(x)=|x|$ oraz*

$$f_n' = \begin{cases} \frac{1+n}{n}|x|^{\frac{1}{n}} & dla\ x\geqslant 0 \\ -\frac{1+n}{n}|x|^{\frac{1}{n}} & dla\ x<0 \end{cases}.$$

*Ponadto $f\notin D^1([-1,1])$*

Niech $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ oraz niech dany będzie ciąg funkcyjny $\{f_n\colon]a,b[\to\mathbb{R} : n\geqslant 1\}$.

**Twierdzenie 12.3** *Niech $f_n\in C^1(]a,b[)$ oraz niech istnieje taki punkt $p\in]a,b[$, że ciąg liczbowy $(f_n(p))$ jest zbieżny i $f_n' \overset{\mathrm{L}}{\rightrightarrows} g$. Wtedy*

*(i) $f_n \overset{\mathrm{L}}{\rightrightarrows} f$*

*(ii) $g=f'$, więc $g\in C^1(]a,b[)$.*

**Wniosek 12.3** *Jeżeli istnieje punkt $p\in]a,b[$ taki, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny, to wtedy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny i jego suma jest funkcja klasy $C^1(]a,b[)$ oraz*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

**Uwaga 12.1** *Ograniczając się do odcinka domkniętego i pozbywając się założenia o ciągłości pochodnych funkcji ciągu $\{f_n : n\geqslant 1\}$ otrzymujemy następujący rezultat.*

**Twierdzenie 12.4** *Niech dany będzie ciąg* $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ *spełniający warunki* $f_n \in D^1([a,b])$ *oraz niech istnieje taki punkt* $p \in [a,b]$*, że ciąg liczbowy* $(f_n(p))$ *jest zbieżny i* $f_n' \rightrightarrows g$*. Wtedy*
*(i)* $f_n \rightrightarrows f$
*(ii)* $g = f'$*, więc* $g \in D^1(]a,b[)$*.*

## 12.4 Zadania

**Zadanie 12.1** *Udowodnić, że jeśli ciąg funkcyjny* $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ *jest monotoniczny i jednostajnie ograniczony to jest jednostajnie zbieżny.*

**Zadanie 12.2** *Niech dany będzie ciąg funkcyjny* $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ *i funkcja* $g : X \to \mathbb{R}$ *ograniczona. Udowodnić, że jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g$ *też jest jednostajnie zbieżny.*

**Zadanie 12.3** *Udowodnić, że suma dwóch ciągów funkcyjnych jednostajnie zbieżnych jest ciągiem jednostajnie zbieżnym.*

**Zadanie 12.4** *Uzasadnić, że w twierdzeniu 12.1 można zastąpić zbieżność jednostajną zbieżnością lokalnie jednostajną bądź niemal jednostajną.*

**Zadanie 12.5** *Udowodnić odpowiednik twierdzenia 12.1 dla całki Riemanna - Stieltjesa.*

**Zadanie 12.6** *Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem zbieżnym i niech* $\{f_n : X \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ *będzie ciągiem funkcyjnym takim, że* $f_n \equiv a_n$*. Udowodnić, że ciąg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny.*

# Wykład 13

# 2003.05.26 / 3h

## 13.1 Istnienie funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej

**Przykład 13.1** *Niech* $[-1,1] \ni x \mapsto \phi(x) = |x|$. *Rozszerzmy funkcję* $\phi$ *do funkcji określonej na całym* $\mathbb{R}$ *warunkiem* $\phi(x) = \phi(x \pmod 2)$. *Określamy funkcję* $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *warunkiem*

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x). \tag{13.1}$$

*Funkcja jest ciągła. Ponadto w żadnym punkcie nie posiada pochodnej.*

**Uwaga 13.1** *Otrzymaliśmy następujący rezultat*

**Twierdzenie 13.1** *Istnieje funkcja rzeczywista określona na prostej rzeczywistej, która jest ciągła, lecz w żadnym punkcie nie posiada pochodnej.*

## 13.2 Szeregi potęgowe raz jeszcze

**Twierdzenie 13.2 (Abela I)** *Szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ *o promieniu zbieżności* $R$ *jest niemal jednostajnie zbieżny w kole zbieżności.*

**Wniosek 13.1** *Funkcja* $]p-R, p+R[\ni x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ *jest funkcją ciągłą.*

**Uwaga 13.2** *Ponieważ pierwotnie funkcje wykładniczą o podstawie e zdefiniowaliśmy jako sumę pewnego szeregu*[1] *korzystając więc z wniosku otrzymujemy twierdzenie.*

**Twierdzenie 13.3** *Funkcja wykładnicza jest funkcją ciągłą.*[2]

**Twierdzenie 13.4 (Abela II)** *Szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ *o promieniu zbieżności* $R \in ]0,+\infty[$ *jest zbieżny w punkcie* $p+R$, *to jest jednostajnie zbieżny w* $[p, p+R]$.

**Wniosek 13.2** *Szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ *o promieniu zbieżności* $R$ *jest lokalnie jednostajnie zbieżny w całym obszarze zbieżności i jego suma jest funkcją ciągłą.*

**Twierdzenie 13.5 (O różniczkowaniu szeregów potęgowych)** *Niech szereg potęgowy* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ *ma dodatni promień zbieżności* $R$. *Wtedy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-p)^{n-1}$ *ma również promień zbieżności* $R$ *oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-p)^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n\right)',$$

*na zbiorze* $\{x \in \mathbb{R} : |x-p| < R\}$

[1] Zobacz definicja 12.4
[2] Jest to twierdzenie 12.9.

**Uwaga 13.3** *Możemy wreszcie udowodnić twierdzenie o pochodnej funkcji wykładniczej.*

**Wniosek 13.3** *Zachodzi następująca zależność*

$$(e^x)' = e^x. \tag{13.2}$$

**Wniosek 13.4** *Niech funkcja $f$ będzie sumą szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-p)^n$ w zbiorze $\{x \in \mathbb{R} : |x-p| < R\}$. Wtedy*
*(i) $f \in C^{\infty}(]p-R, p+R[)$*
*(ii) $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-p)^{n-k}$*
*(iii) $a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$.*

**Twierdzenie 13.6** *Niech szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny. I niech dla $|x| < 1$ będzie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

*Wtedy*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{13.3}$$

**Uwaga 13.4** *Udowodnimy na tej podstawie twierdzenie Abela dla iloczynu Cauchy'ego szeregów liczbowych (twierdzenie 7.5). Przypomnijmy je*

**Twierdzenie 13.7 (Abela (twierdzenie 7.5))** *Jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ są zbieżne do $A, B, C$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego dwóch pozostałych, to AB=C.*

**Twierdzenie 13.8** *Niech szeregi potęgowe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ będą zbieżne na przedziale $]-R, R[$ $(R > 0)$, Niech $X$ będzie zbiorem wszystkich punktów tego przedziału, dla których*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{13.4}$$

*Wtedy jeżeli zbiór $X$ posiada punkt skupienia będący elementem tego przedziału, to równość (13.4) zachodzi w każdym punkcie przedziału $]-R, R[$.*

**Uwaga 13.5** *Do dowodu konieczne będą następujące twierdzenia*

**Twierdzenie 13.9** *Niech $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podwójnym takim, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ jest zbieżny, gdzie $b_i = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Wtedy*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{13.5}$$

**Twierdzenie 13.10 (Taylora)** *Niech szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma dodatni promień zbieżności $R$. W kole zbieżności tego szeregu definiujemy funkcję $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeżeli $|a| < R$, to funkcję $f$ można rozwinąć w punkcie $x = a$ w szereg potęgowy zbieżny w kole zbieżności[3] o promieniu $R - |a|$, przy czym to rozwinięcie jest postaci*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{13.6}$$

**Uwaga 13.6** *Rozwinięcie w powyższym twierdzeniu nazywamy szeregiem Taylora.*

[3] Koło zbieżności jest zbiorem $\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R - |a|\}$.

## 13.3 Zadania

**Zadanie 13.1** *Udowodnić, że dla nieujemnego ciągu podwójnego* $(a_{ij})$ *zachodzi równość (13.5). Nie wykluczamy przypadku nieskończonego.*

**Zadanie 13.2** *Niech ciąg podwójny określony jest następująco*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i < j \\ -1 & \text{dla } i = j \\ 2^{j-i} & \text{dla } i > j \end{cases}. \tag{13.7}$$

*Udowodnić, że* $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = -2$ *oraz* $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0$.

# Wykład 14

# 2003.06.02 / 3h

## 14.1 Funkcje analityczne

Niech $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym, zaś $f\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ funkcją.

**Definicja 14.1** *Mówimy, że funkcję $f$ analityczna w punkcie $x_0 \in \mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ o niezerowym promieniu zbieżności $R$ taki, że*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

*dla $x$ ze zbioru $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\}$.*

*Jeżeli $f$ jest analityczna na $\mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest analityczna w każdym punkcie tego zbioru.*

Zbiór wszystkich funkcji analitycznych na zbiorze $\mathcal{O}$ oznaczamy $C^{\omega}(\mathcal{O})$.

**Uwaga 14.1** *Istnieje funkcja nieskończenie wiele razy różniczkowalna, lecz nie analityczna. Pokazuje to następujący przykład.*

**Przykład 14.1**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

**Twierdzenie 14.1** *Niech szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - p)^n$ ma niezerowy promień zbieżności $R$. Wtedy funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x - p)^n$ jest funkcją analityczną w kole zbieżności.*

**Twierdzenie 14.2** *Niech $f \in C^{\infty}(]p - R, p + R[)$, gdzie $R$ jest liczba dodatnią. Wówczas $f \in C^{\omega}(]p - R, p + R[)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(p, h) = 0$, gdzie $r_n(p, h)$ jest resztą (n - tą) w rozwinięciu Taylora.*

**Twierdzenie 14.3** *Niech $f \in C^{\infty}(]p - R, p + R[)$, gdzie $R$ jest liczba dodatnią, będzie taką funkcją, że ciąg pochodnych jest jednostajnie ograniczony na $]p - R, p + R[$. Wtedy $f$ jest funkcją analityczną.*

**Przykład 14.2** *Funkcja $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ jest funkcją analityczną.*

**Przykład 14.3** *Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są funkcjami analitycznymi. Wyrażają się one wzorami*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{14.2}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{14.3}$$

## 14.2 Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa

Celem niniejszego paragrafu jest sformułowanie jednego z najważniejszych twierdzeń analizy matematycznej, a jednocześnie analizy funkcjonalnej, a mianowicie twierdzenia o gęstości algebr o określonych własnościach w zbiorze funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym.

**Twierdzenie 14.4 (Weierstrassa)** *Niech $f$ będzie funkcją ciągłą określoną na odcinku $[a, b]$ $(a < b)$. Wtedy istnieje ciąg wielomianów $\{P_n\colon [a, b] \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ zbieżny jednostajnie do funkcji $f$.*

**Wniosek 14.1** *Dla dowolnego odcinka $[-a, a]$ $(a > 0)$ istniej ciąg wielomianów $\{P_n\colon [a, b] \to \mathbb{R} : n \geqslant 1\}$ taki, że $P_n(0) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$ jednostajnie na $[-a, a]$.*

Niech $X \neq \emptyset$ będzie dowolnym zbiorem oraz niech $\mathfrak{A} = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$ będzie zbiorem funkcji.

**Definicja 14.2** *Zbiór funkcji $\mathfrak{A}$ nazywamy algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{f,g\in\mathfrak{A}} f + g \in \mathfrak{A} \tag{14.4}$$

$$\forall_{f,g\in\mathfrak{A}} f \cdot g \in \mathfrak{A} \tag{14.5}$$

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\forall_{f\in\mathfrak{A}} c \cdot f \in \mathfrak{A}. \tag{14.6}$$

**Definicja 14.3** *Powiemy, że zbiór funkcji $\mathfrak{A}$ rozdziela punkty zbioru $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in X} x \neq y \exists_{f\in\mathfrak{A}} f(x) \neq f(y). \tag{14.7}$$

**Definicja 14.4** *Powiemy, że zbiór funkcji $\mathfrak{A}$ nie znika w żadnym punkcie $X$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x\in X} \exists_{f\in\mathfrak{A}} f(x) \neq 0. \tag{14.8}$$

**Przykład 14.4** *Zbiór wielomianów jest algebrą rozdzialającą punkty $\mathbb{R}$ i nie znikającą w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.*

**Przykład 14.5** *Zbiór wielomianów stopnia parzystego jest algebrą nie rozdzialającą punktów $\mathbb{R}$ i jest algebrą nie znikającą w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.*

**Przykład 14.6** *Zbiór wielomianów stopnia nieparzystego jest algebrą rozdzialającą punkty $\mathbb{R}$ i nie jest algebrą nie znikającą w żadnym punkcie $\mathbb{R}$.*

**Twierdzenie 14.5** *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą wszystkich funkcji rozdzielającą punkty zbioru $X$ i nie znikającą w żadnym punkcie zbioru $X$. Niech $x, y \in X$ będą dowolnymi dwoma różnymi punktami zbioru $X$, a $\alpha$ i $\beta$ dowolnymi stałymi. Istnieje wtedy funkcja $f \in \mathfrak{A}$ taka, że $f(x) = \alpha$ i $f(y) = \beta$.*

Niech dodatkowo $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną.

**Definicja 14.5** *Zbiór funkcji $\mathfrak{A}$ nazywamy jednostajnie domkniętym wtedy i tylko wtedy,*

$$\forall_{\{f_n : n\geqslant 1\}\subset\mathfrak{A}} f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f \in \mathfrak{A}. \tag{14.9}$$

**Definicja 14.6** *Zbiór*

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{f\colon X \to \mathbb{R} : \exists_{\{f_n : n\geqslant 1\}\subset\mathfrak{A}} f_n \rightrightarrows f\right\} \tag{14.10}$$

*nazywamy jednostajnym domknięciem zbioru $\mathfrak{A}$.*

**Twierdzenie 14.6** *Niech $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ będzie jednostajnym domknięciem algebry $\mathfrak{A}$, której elementami są funkcje ograniczone. Wtedy $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ jest jednostajnie domknięta.*

**Twierdzenie 14.7 (Stone'a - Weierstrassa)** *Niech $\mathfrak{A}$ będzie algebrą funkcji rzeczywistych, ciągłych, określonych na zbiorze zwartym $K$. Jeżeli $\mathfrak{A}$ rozdziela punkty zbioru $K$ i nie znika w żadnym punkcie zbioru $K$, to $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ jednostajne domknięcie algebry $\mathfrak{A}$ zawiera wszystkie funkcje rzeczywiste ciągłe na $K$.*

**Uwaga 14.2** *Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa można sformułować następująco:*
*Algebra funkcji rzeczywistych, ciągłych, określonych na zbiorze zwartym $K$ rozdzielająca punkty zbioru $K$ i nie znikająca w żadnym punkcie zbioru $K$ jest podzbiorem gęstym w przestrzeni metrycznej funkcji rzeczywistych ciągłych na $K$ z metryką supremum.*

## 14.3 Zadania

**Zadanie 14.1** *Wyprowadzić wzory na sinus i cosinus jako szeregi nieskończone za pomocą twierdzania Taylora.*

**Zadanie 14.2** *Udowodnić, że każdy wielomian jest funkcją analityczną.*

**Zadanie 14.3** *Udowodnić indukcyjnie, że funkcja z przykładu 14.1 jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie zero.*

# Wykład 15

# 2003.06.09 / 3h

## 15.1 Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa w wersji zespolonej

## 15.2 Szeregi Fouriera

## 15.3 Zadania

# Wykład 16

# Egzamin

## 16.1 Zagadnienia na egzamin teoretyczny

1. Monotoniczność, a pochodna.
2. Jednostajna ciągłość, a pochodna.
3. Ekstrema. Ekstrema, a pochodna.
   (a) Pojęcia otoczenie, sąsiedztwo, ekstremum.
   (b) Twierdzenie Fermata i I warunek dostateczny istnienia ekstremum.
   (c) Inne twierdzenia z tego zakresu.
4. Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora.
   (a) Pojęcie pochodnych wyższych rzędów.
   (b) Wzór Leibniza.
   (c) Twierdzenie Taylora i Maclaurina.
   (d) II warunek dostateczny istnienia ekstremum.
   (e) Reguła de l'Hospitala
5. Wklęsłość i wypukłość, a pochodna.
   (a) Wklęsłość i wypukłość, a pochodna.
   (b) Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia.
   (c) Warunki dostateczne istnienia punktów przegięcia.
6. Całka nieoznaczona
   (a) Pojęcie całki nieoznaczonej i podstawowe wzory.
   (b) Klasyczne twierdzenia o całkowaniu dla całki nieoznaczonej.
   (c) Całkowanie funkcji wymiernych.
   (d) Całkowanie funkcji trygonometrycznych.
   (e) Całkowanie funkcji niewymiernych. Podstawienia Eulera.
7. Całka Riemanna i Riemanna - Stieltjesa.
   (a) Definicja całki Riemanna.
   (b) Definicja całki Riemanna - Stieltjesa.
   (c) Związki między sumami dolnymi i górnymi oraz całką dolną, górną.

(d) Warunek konieczny i dostateczny całkowalności i wniosek z niego.
(e) Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna - Stieltjesa.
    i. Funkcje ciągłe;
    ii. Funkcje monotoniczne;
    iii. Funkcje ograniczone;
    iv. Twierdzenie o złożeniu;
(f) Własności całki Riemanna - Stieltjesa.
    i. Twierdzenie **Własności całki Riemanna - Stieltjesa**
    ii. Twierdzenie o iloczynie funkcji i twierdzenie wartości bezwzględnej.
    iii. Całka względem funkcji schodkowej.
    iv. Wyrażenie całki Riemanna - Stieltjesa przez całkę Riemanna.
    v. Twierdzenie o zamianie zmiennych i wnioski z niego.
(g) Klasy funkcji całkowalnych w sensie Riemanna – twierdzenie Lebesgue'a.
    i. Zbiory miary zero i zbiór Cantora.
    ii. Twierdzenie Lebesgue'a i wnioski z niego.
(h) Całkowanie (całka Riemanna), a różniczkowanie.
    i. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
    ii. Twierdzenie Newtona - Leibniza i twierdzenie o całkowaniu przez części

8. Całki niewłaściwe Riemanna.
    (a) Określenie całki niewłaściwej.
    (b) Całka niewłaściwa z funkcji całkowalnej w sensie Riemanna.
    (c) Własności całek niewłaściwych.
    (d) Kryterium porównawcze zbieżności całek niewłaściwych.
    (e) Kryterium całkowe zbieżności szeregu.
    (f) Kryterium Abela - Dirichleta zbieżności całek niewłaściwych
    (g) Kryterium zbieżności bezwzględnej całek niewłaściwych.
    (h) Inne kryteria zbieżności całek niewłaściwych.
    (i) Ważne całki niewłaściwe.
9. Całki niewłaściwe Riemanna zbieżne w sensie wartości głównej.
    (a) Pojęcie całki zbieżnej w sensie wartości głównej.
    (b) Związek między zbieżnością w sensie wartości głównej na prostej, a zbieżnością całki niewłaściwej.
10. Funkcja logarytmiczna (wg Kleina) i wykładnicza – inaczej.
    (a) Określenie i własności logarytmu.
    (b) Określenie i własności funkcji wykładniczej.
    (c) Określenie i własności funkcji potęgowej i potęgi ogólnej.
    (d) Związek liczby $e$ z wartością funkcji wykładniczej w punkcie jeden.
11. Całkowanie funkcji o wartościach wektorowych
    (a) Pojęcie funkcji wektorowej.
    (b) Długość łuku krzywej.

12. Zbieżność ciągów funkcyjnych
    (a) Rodzaje zbieżności.
    (b) Zależności między różnego rodzajem zbieżnościami (oczywiste implikacje).
    (c) Zależności między zbieżnością jednostajną, a niemal jednostajną.
    (d) Zależności między zbieżnością niemal jednostajną, a zbieżnością lokalnie jednostajną.
    (e) Jednostajny warunek Cauchy'ego, a zbieżność jednostajna.
    (f) Zbieżność, a ciągłość.
    (g) Twierdzenie o zmianie kolejności granic.
    (h) Twierdzenie Diniego
    (i) Zbieżność jednostajna ciągu funkcji jednostajnie ciągłych.
    (j) Przestrzeń $C(X)$.
13. Zbieżność szeregów funkcyjnych
    (a) Rodzaje zbieżności szeregów funkcyjnych.
    (b) Warunek konieczny i dostateczny zbieżności jednostajnej.
    (c) Kryterium Weierstrassa Zbieżności jednostajnej.
    (d) Kryteria Abela i Dirichleta zbieżności jednostajnej.
    (e) Zbieżność jednostajna, a zbieżność bezwzględna.
14. Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.
15. Różniczkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.
16. Istnienie funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej.
17. Szeregi potęgowe.
    (a) Pojęcie szeregu potęgowego i jego promienia zbieżności.
    (b) Twierdzenia Abela.
    (c) Różniczkowanie szeregu potęgowego.
    (d) Twierdzenia Abela o iloczynie Cauchy'ego szeregów liczbowych (dowód).
    (e) Twierdzenie Taylora.
18. Funkcje analityczne.
    (a) Pojęcie funkcji analitycznej.
    (b) Twierdzenia o tym kiedy funkcja gładka jest analityczna.
19. Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa.
    (a) Twierdzenie Weierstrassa.
    (b) Twierdzenie Stone'a.
    (c) Postać zespolona twierdzenia Stone'a
20. Szeregi Fouriera.
    (a) Pojęcie wielomianu trygonometrycznego i szeregu Fouriera.
    (b) Postać zespolona szeregu Fouriera.
    (c) Podstawowe twierdzenia o szeregach Fouriera.

## 16.2 Zadania z egzaminu

1. Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = (2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$. **4pkt/44pkt**

2. Udowodnić, że dla $x \geqslant 1$ zachodzi nierówność $e^x \geqslant e \cdot x$. **4pkt/44pkt**

3. Policzyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$. **4pkt/44pkt**

4. Udowodnić, że jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, to $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p-h)}{h} = f'(p)$. DODATKOWO: Czy twierdzenie *Jeżeli istnieje skończona granica* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p-h)}{h}$*, to funkcja jest różniczkowalna w punkcie* $p$ jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij. **4pkt(+4pkt)/44pkt**

5. Policzyć całkę $\int \frac{x+2}{x^2-1}dx$. **4pkt/44pkt**

6. Policzyć całkę $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$. **4pkt/44pkt**

7. Niech funkcja $f$, określona na przedziale $[-1,1]$, będzie ciągła. Udowodnić, że zachodzi równość $\int\limits_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)dx$. **4pkt/44pkt**

8. Policzyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$. **4pkt/44pkt**

9. Wyznaczyć obszar zbieżności, funkcję graniczną oraz określić rodzaje zbieżności dla ciągu funkcyjnego $(f_n)$, którego wyrazy zadane są następująco $f_n(x) = 2n^2x^2e^{-n^2x^4}$. **8pkt/44pkt**

10. Niech dany będzie szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n(3n+1)}{6^n}(x+10)^{3n}$. Wyznaczyć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregu. DODATKOWO: Wyznaczyć sumę szeregu. **4pkt(+4pkt)/44pkt**

## 16.3 Zadania z egzaminu/sytuacja niepewna

1. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$. **5pkt/10pkt**

2. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ zbieżny jest jednostajnie, to na tym samym przedziale zbieżny jest jednostajnie szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. **5pkt/10pkt**